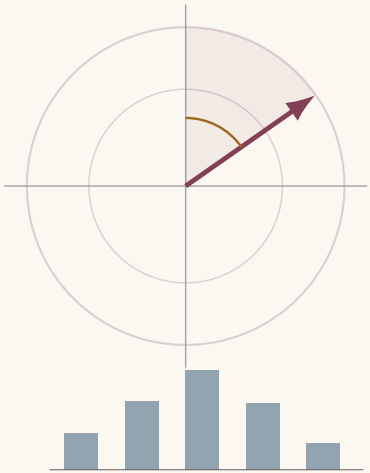
Modulo 02. Fondamenti matematici

Fondamenti matematici

Geometria, probabilità e misura quantistica

Marzio De Corato Danilo Bruschi
Dipartimento di Informatica
"Giovanni Degli Antoni"
Università degli Studi di Milano



Materiale distribuito con licenza CC BY-NC-SA 4.0

Dalle ampiezze alle operazioni

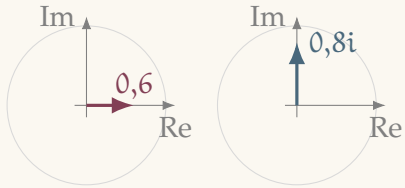
Riprendiamo la preparazione finale del primo modulo:

$$(a_H, a_V) = (0{,}6;\ 0{,}8i).$$

Rappresentiamo modulo e fase di ogni componente nel piano complesso, con coordinate

$$a_H \longleftrightarrow (0{,}6; 0), \qquad a_V \longleftrightarrow (0; 0{,}8).$$

Vettori e matrici consentiranno di calcolare le trasformazioni delle figure. Questi strumenti verranno poi impiegati nei circuiti del terzo modulo.



Componente H Componente V
Cerchi di raggio uno; stessa scala

Il problema comune consiste nel conservare le ampiezze durante le trasformazioni, ricavando le probabilità soltanto per la lettura scelta.

Seguire e verificare un esempio

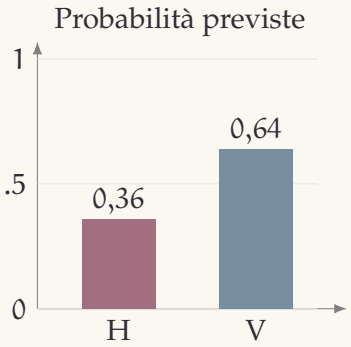
Per $(a_H, a_V) = (0{,}6; 0{,}8i)$, la lettura H/V associa a ogni ampiezza il modulo quadro. Svolgiamo il prodotto con il coniugato:

$$p_H = a_H^* a_H = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36,$$
$$p_V = a_V^* a_V = (-0{,}8i)(0{,}8i)$$
$$= -0{,}64i^2 = 0{,}64.$$

Poiché $i^2 = -1$, entrambi i pesi sono positivi. La loro somma verifica

$$p_H + p_V = 0{,}36 + 0{,}64 = 1.$$

Le altezze del grafico rappresentano i risultati.



In ogni esempio seguiremo questa procedura: identificare la preparazione, svolgere il calcolo, verificarne i vincoli e interpretare la previsione.

Il percorso

I. Vettori e trasformazioni

Le ampiezze diventano coordinate; le operazioni diventano matrici.

II. Probabilità e dati

Distribuzioni, medie e dispersioni collegano la previsione alle prove ripetute.

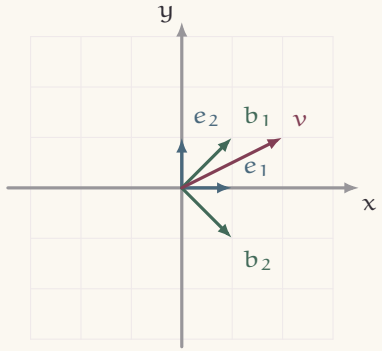
III. Stati e misura

Vettori e probabilità descrivono preparazioni, trasformazioni e misure.

Parte 1

I · Vettori e trasformazioni

Dalle ampiezze alle coordinate, dalle coordinate alle operazioni che un simulatore deve eseguire.



Stesso vettore, assi diversi

Le sezioni della parte 1

1 Numeri complessi

2 Vettori, basi e coordinate

3 Prodotto interno e ortogonalità

4 Matrici e trasformazioni lineari

5 Aggiunto, hermitiane e unitarie

6 Autovalori e autovettori

7 Diagonalizzazione e spettro

8 Cambio di base e commutatori

9 Nucleo, immagine e rango

10 Prodotto tensoriale

11 Funzioni di matrici

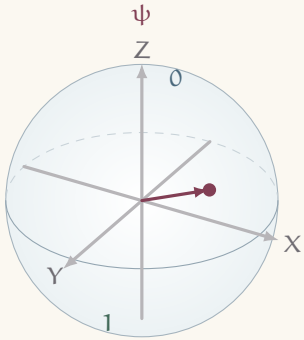
12 Un problema di algebra completo

Dalle figure della prima lezione ai numeri

La polarizzazione ci ha permesso di confrontare preparazioni, trasformazioni e misure. La sfera di Bloch ne ha raccolto le relazioni geometriche.

Ora vogliamo calcolare gli esiti anche quando gli angoli non sono quelli dei casi più semplici.

Servono numeri che conservino modulo e fase, vettori che raccolgano le ampiezze e operazioni che le trasformino.



Sfera di Bloch: stati puri

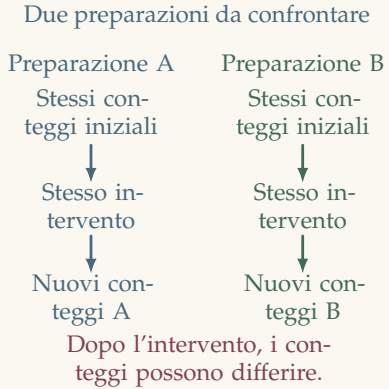
La geometria rimane il riferimento mentre costruiamo il linguaggio del calcolo.

Le informazioni necessarie alla descrizione

Due preparazioni possono dare gli stessi conteggi in una misura e risultati diversi dopo una trasformazione.

Per questo conservare soltanto le probabilità iniziali non basta.

Descriveremo prima le ampiezze, poi le loro trasformazioni e infine la regola che produce le probabilità.



Il programma deve conservare anche l'informazione necessaria a prevedere gli interventi successivi.

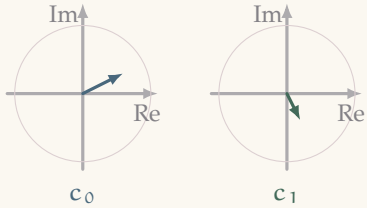
Quale geometria stiamo guardando?

Un piano cartesiano rappresenta vettori reali a due componenti. Un piano complesso rappresenta una sola componente complessa.

Per due componenti complesse useremo due piani, oppure una rappresentazione dello stato sulla sfera di Bloch quando avremo introdotto le sue coordinate.

Le didascalie indicheranno sempre quale spazio è rappresentato.

Due componenti complesse



Un piano complesso per componente
Cerchi: modulo uno; stessa scala

Un diagramma piano di un esempio reale non pretende di rappresentare tutto lo spazio complesso.

Le conoscenze da cui partiamo

Useremo operazioni con frazioni, potenze e radici, equazioni di primo grado e la formula risolutiva del secondo grado.

Introdurremo qui numeri complessi, vettori, matrici e probabilità. Richiameremo anche gli angoli e le proiezioni sulla circonferenza prima di usarli.

Le rappresentazioni fisiche riprendono la lezione precedente; il calcolo sarà sviluppato a partire dalle definizioni.

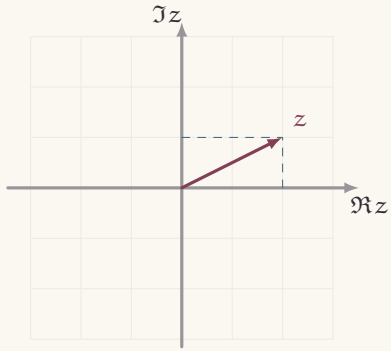


Ogni nuovo simbolo sarà definito al primo uso.

Capitolo 1

Numeri complessi

Le ampiezze hanno modulo e fase. Un punto del piano permette di conservare entrambe le informazioni.



Piano complesso

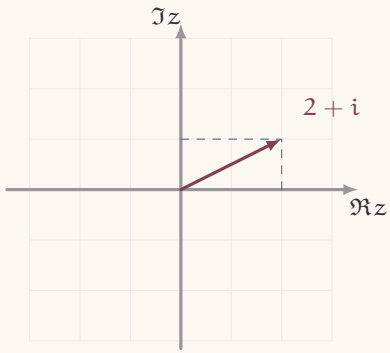
Una nuova coordinata per la fase

Definiamo i mediante $i^2 = -1$. Un numero complesso ha la forma

$$z = a + ib, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

La parte reale è a; la parte immaginaria è il numero reale b.

Nel piano, z è il punto (a, b). Per esempio $2 + i$ corrisponde a $(2, 1)$.



Piano complesso

Le due coordinate descrivono un solo numero complesso.

Somma: si sommano le componenti

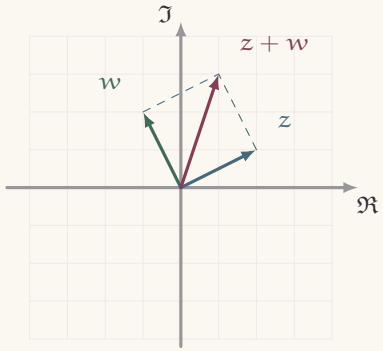
Per $z = a + ib$ e $w = c + id$,

$$z + w = (a + c) + i(b + d).$$

Esempio. Con $z = 2 + i$, $w = -1 + 2i$:

$$\begin{aligned} z + w &= (2 - 1) + i(1 + 2) \\ &= 1 + 3i. \end{aligned}$$

La somma è la diagonale del parallelogramma.



Si può traslare la freccia di w sulla punta di z, mantenendone lunghezza e direzione.

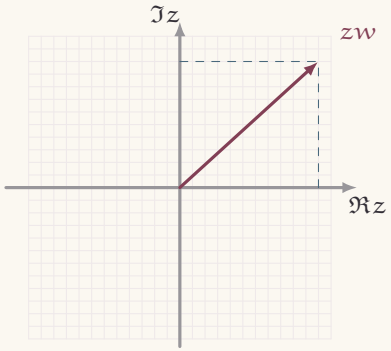
Prodotto: sviluppare e usare $i^2 = -1$

Si moltiplicano i binomi:

$$\begin{aligned}(a+ib)(c+id) &= ac + iad + ibc + i^2bd \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc).\end{aligned}$$

Esempio.

$$\begin{aligned}(3-2i)(1+4i) &= 3 + 12i - 2i - 8i^2 \\ &= 3 + 10i + 8 \\ &= 11 + 10i.\end{aligned}$$



Piano complesso

Il segno del termine reale $-bd$ deriva direttamente da $i^2 = -1$.

Moltiplicare per i: un quarto di giro

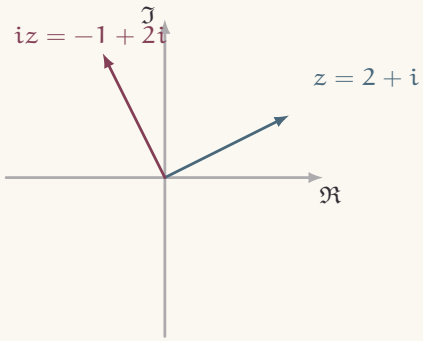
Per riconoscere un primo effetto geometrico, moltiplichiamo $z = a + ib$ per i:

$$iz = ia + i^2 b = -b + ia.$$

Le coordinate (a, b) diventano $(-b, a)$: la freccia compie un quarto di giro antiorario.

$$i(2 + i) = 2i + i^2 = -1 + 2i.$$

La lunghezza resta invariata, poiché $(-b)^2 + a^2 = a^2 + b^2$.



Le coordinate seguono la rotazione.

Ripetendo l'operazione due volte si ottiene $i^2 z = -z$, cioè un mezzo giro.

Coniugio: una riflessione nel piano

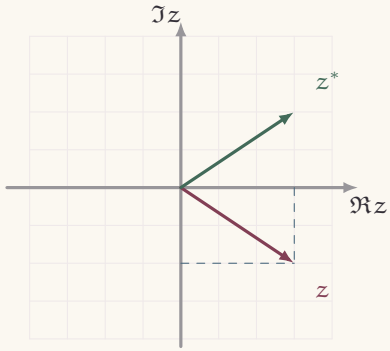
Il coniugato di $z = a + ib$ è

$$z^* = a - ib.$$

Per $z = 3 - 2i$ si ottiene $z^* = 3 + 2i$.

$$\begin{aligned} zz^* &= (3 - 2i)(3 + 2i) \\ &= 9 + 6i - 6i - 4i^2 \\ &= 9 + 4 = 13. \end{aligned}$$

Il prodotto è reale e non negativo.



Piano complesso

Il coniugio cambia il segno della coordinata verticale e conserva la distanza dall'origine.

Modulo e normalizzazione

La distanza dall'origine è

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad |z|^2 = zz^*.$$

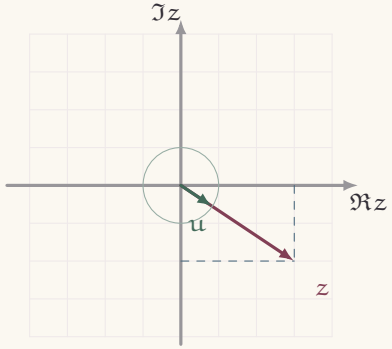
Per $z = 3 - 2i$:

$$|z| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

Il numero $u = z/|z|$ ha modulo uno:

$$|u|^2 = \frac{3^2 + (-2)^2}{13} = \frac{9 + 4}{13} = 1.$$

Si conserva la direzione e si cambia la lunghezza.



Piano complesso

La normalizzazione divide entrambe le coordinate per la stessa lunghezza.

Il quadrato e il modulo quadro

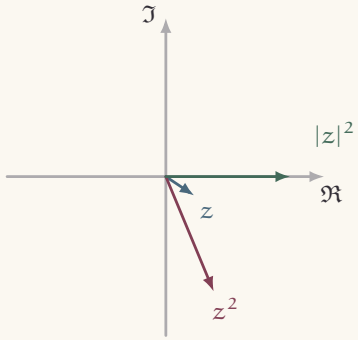
Il quadrato produce un altro numero complesso:

$$(3-2\mathrm{i})^2 = 9-6\mathrm{i}-6\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2$$
$$= 9-12\mathrm{i}-4 = 5-12\mathrm{i}.$$

Il modulo quadro usa invece il coniugato:

$$|3-2\mathrm{i}|^2 = (3-2\mathrm{i})(3+2\mathrm{i}) = 13.$$

Il primo risultato è un numero complesso; il secondo misura il quadrato della distanza dall'origine.



Tre quantità sullo stesso piano.

Il simbolo di modulo cambia l'operazione che viene eseguita.

Divisione: rendere reale il denominatore

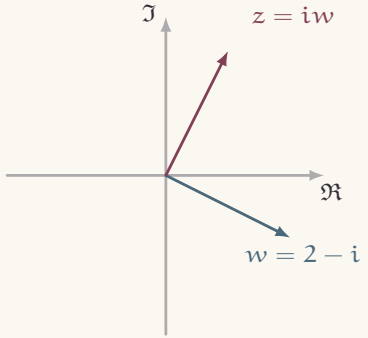
Per $w \neq 0$ moltiplichiamo sopra e sotto per w^*:

$$\frac{z}{w} = \frac{zw^*}{|w|^2}.$$

Esempio.

$$\begin{aligned}\frac{1+2i}{2-i} &= \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \\ &= \frac{2+i+4i+2i^2}{4+2i-2i-i^2} \\ &= \frac{5i}{5} = i.\end{aligned}$$

Controllo: $i(2-i) = 2i - i^2 = 1 + 2i$.



Il controllo ricostruisce il numeratore.

Il denominatore vale $4 + 2i - 2i + 1 = 5$; anche il numeratore si riduce a $5i$.

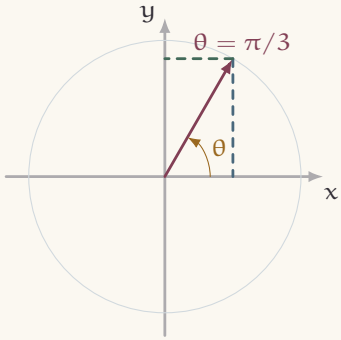
Angoli e proiezioni sulla circonferenza

Sulla circonferenza unitaria, il punto individuato dall'angolo θ ha coordinate $(\cos\theta, \sin\theta)$: sono le proiezioni del raggio sui due assi.

Un angolo in radianti è il rapporto fra lunghezza dell'arco e raggio. Un giro completo misura 2π radianti, cioè $360°$.

$$\pi = 180°, \quad \pi/2 = 90°, \quad \pi/3 = 60°.$$

Una rotazione oraria ha angolo negativo.



Circonferenza unitaria

Le identità seno e coseno sono riferite a queste proiezioni.

L'esponenziale come limite di polinomi

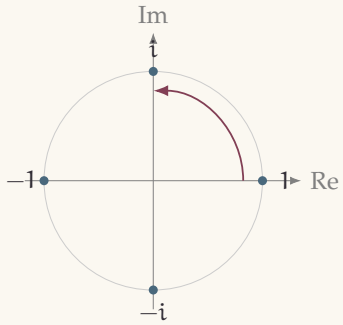
Per ricavare l'identità di Eulero introduciamo la serie dell'esponenziale. Con $0! = 1$ e $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$:

$$e^z = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}.$$

I primi termini sono

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \cdots.$$

Ogni somma finita è un polinomio; il limite definisce l'esponenziale anche per z complesso.



Moltiplicare per i ruota di un quarto di giro.

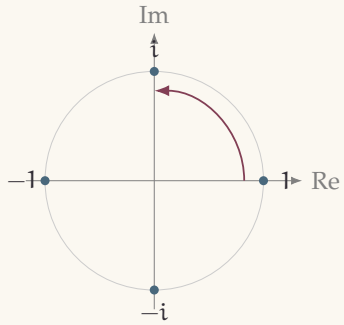
Il simbolo di serie indica il limite delle somme parziali; il fattoriale cresce a ogni nuovo termine.

La convergenza consente di raggruppare i termini

Poniamo $a_n = |z|^n/n!$. Per z fissato,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1}.$$

Per $n+1 \geq 2|z|$ il rapporto è al più $1/2$. La coda è quindi maggiorata da una serie geometrica convergente. Per $z = 0$ la convergenza è immediata. La convergenza assoluta permette di separare i termini pari da quelli dispari senza modificare la somma.



Moltiplicare per i
ruota di un quarto di giro.

La stima mediante una serie geometrica giustifica il riordinamento per $z = i\theta$.

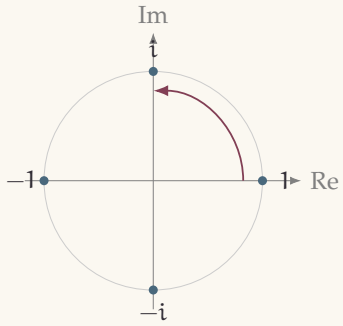
Le potenze pari e dispari di i

Da $i^2 = -1$ segue, per ogni intero $k \geq 0$,

$$i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k,$$
$$i^{2k+1} = i\, i^{2k} = i(-1)^k.$$

Ponendo $z = i\theta$ nella serie:

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$



Moltiplicare per i
ruota di un quarto di giro.

Le potenze pari contribuiscono alla coordinata reale; le dispari alla coordinata immaginaria.

Le due serie ricostruiscono seno e coseno

Usiamo gli sviluppi delle funzioni trigonometriche, con gli angoli in radianti:

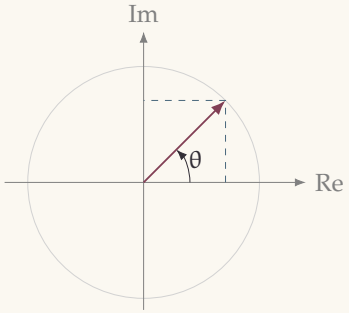
$$\cos\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sin\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Confrontando le due serie si ottiene

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Il modulo vale $\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$; la fase individua il punto della circonferenza.



$\theta = \pi/4$, $r = 1$
Coordinate $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Gli sviluppi di seno e coseno sono il prerequisito di analisi dichiarato in questa derivazione.

Forma polare: distanza e angolo

Per un numero $z \neq 0$ scriviamo le coordinate attraverso la distanza r e l'angolo θ:

$$a = r\cos\theta, \qquad b = r\sin\theta.$$

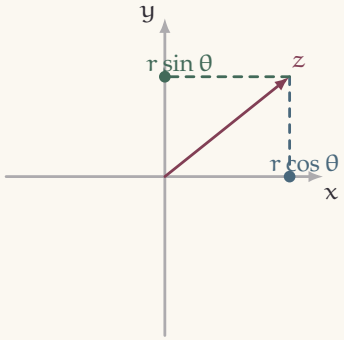
La formula di Eulero appena ricavata è

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

che collega l'esponenziale alla circonferenza. Pertanto

$$z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.$$

Gli angoli θ e $\theta + 2\pi$ individuano lo stesso punto.



Il raggio ha lunghezza r.

La derivazione per serie precede questa forma polare; per $z = 0$ l'angolo non è definito.

Esempio: riconoscere il quadrante

Sia $z = 1 - i\sqrt{3}$.

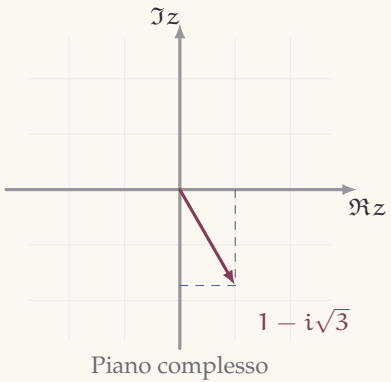
$$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2.$$

Le coordinate hanno segni $+$ e $-$: il punto è nel quarto quadrante.

$$\cos\theta = \frac{1}{2}, \quad \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Possiamo scegliere $\theta = -\pi/3$, quindi

$$z = 2e^{-i\pi/3}.$$



Piano complesso

Il rapporto fra le coordinate da solo non distingue quadranti opposti.

Perché l'angolo è meno sessanta gradi

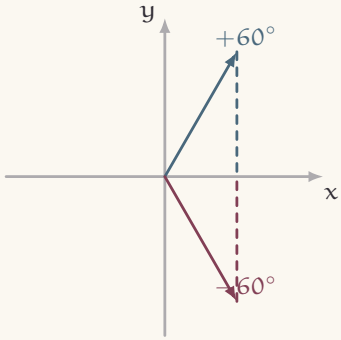
Un triangolo equilatero di lato 2, diviso dall'altezza, ha ipotenusa 2 e un cateto 1. L'altro cateto misura

$$\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}.$$

L'angolo adiacente al cateto 1 è $60°$, quindi

$$\cos 60° = \frac{1}{2}, \qquad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Riflettendo il punto sotto l'asse reale cambia il segno del seno: si ottiene $\theta = -60° = -\pi/3$.



La riflessione conserva il coseno.

Prodotti e potenze diventano rotazioni

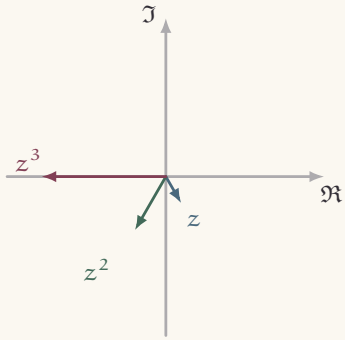
In forma polare,

$$r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

Per $z = 2e^{-i\pi/3}$:

$$\begin{aligned} z^3 &= 2^3 e^{-i\pi} \\ &= 8\,[\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)] \\ &= 8(-1+0i) = -8. \end{aligned}$$

Il modulo diventa 8; l'angolo viene triplicato.



La scala è comune ai tre vettori.

Moltiplicare per un numero di modulo uno produce una rotazione senza dilatazione.

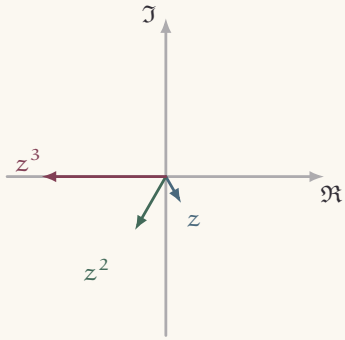
Il passaggio intermedio della potenza

Il quadrato del numero $z = 2e^{-i\pi/3}$ ha modulo 4 e angolo $-2\pi/3$:

$$\begin{aligned} z^2 &= 4e^{-2i\pi/3} \\ &= 4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -2 - 2i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Moltiplicando ancora per z, il modulo diventa $4 \cdot 2 = 8$ e l'angolo $-2\pi/3 - \pi/3 = -\pi$.

La figura segue gli stessi tre passaggi del calcolo.



La scala è comune ai tre vettori.

Prodotti e quozienti in forma polare

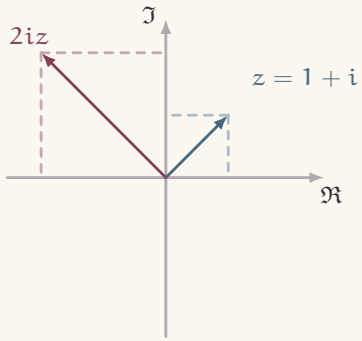
Per $z = re^{i\alpha}$ e $w = se^{i\beta}$:

$$zw = rs\, e^{i(\alpha+\beta)}, \qquad \frac{z}{w} = \frac{r}{s}\, e^{i(\alpha-\beta)} \quad (s > 0).$$

Il prodotto moltiplica le lunghezze e somma gli angoli; il quoziente divide le lunghezze e sottrae gli angoli.

Per esempio, moltiplicare per $2i = 2e^{i\pi/2}$ raddoppia la lunghezza e aggiunge un quarto di giro:

$$(2i)(1+i) = 2i + 2i^2 = -2 + 2i.$$



Un quarto di giro e una dilatazione di fattore 2

Questa lettura riprende geometricamente i prodotti e i quozienti calcolati in forma cartesiana.

Esempio: le quattro radici di uno

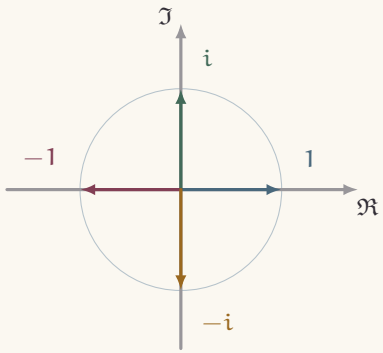
Cerchiamo $z^4 = 1$. Con $z = re^{i\theta}$, $r \geq 0$, devono valere

$$r^4 = 1 \Rightarrow r = 1, \qquad 4\theta = 2k\pi.$$

Per $k = 0, 1, 2, 3$ otteniamo:

k	θ	$\cos\theta + i\sin\theta$
0	0	1
1	$\pi/2$	i
2	π	-1
3	$3\pi/2$	$-i$

Per $k = 4$ si ritorna all'angolo 2π e alla prima radice.



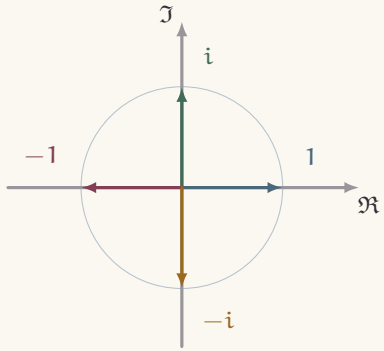
Le radici sono equidistanti sulla circonferenza unitaria.

Controllare tutte le quattro radici

Verifichiamo separatamente i quattro valori:

$$1^4 = 1, \qquad i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1,$$
$$(-1)^4 = 1,$$
$$(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = -1, \qquad (-i)^4 = (-1)^2 = 1.$$

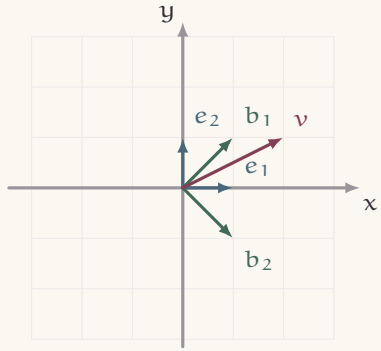
Gli angoli differiscono di $\pi/2$: moltiplicare una radice per i porta alla successiva. Dopo quattro passi si ritorna al punto di partenza.



Capitolo 2

Vettori, basi e coordinate

Una sola ampiezza è un numero. Per descrivere più alternative dobbiamo raccogliere più ampiezze.



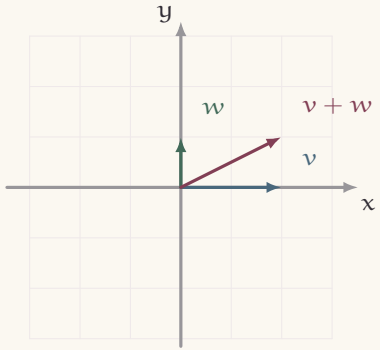
Stesso vettore, assi diversi

Vettori e combinazioni lineari

Un vettore di $\mathbb{C}^n$ raccoglie n numeri complessi. Somma e prodotto per uno scalare agiscono su ogni componente.

$$\alpha v + \beta w = \begin{pmatrix} \alpha v_1 + \beta w_1 \\ \vdots \\ \alpha v_n + \beta w_n \end{pmatrix}.$$

Nel caso reale a due componenti, la somma si costruisce traslando le frecce.



Uno scalare è un singolo numero. $\mathbb{C}$ indica i numeri complessi; $\mathbb{C}^n$ raccoglie le colonne di n componenti.

Leggere indici, somme e trasposte

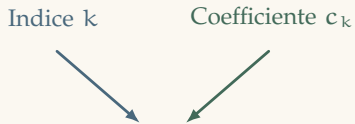
L'indice k identifica una componente. La sommatoria abbrevia un elenco di addendi:

$$\sum_{k=1}^{3} c_k v_k = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3.$$

Il simbolo T trasforma una riga in una colonna:

$$(a, b)^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

La trasposizione cambia la disposizione dei coefficienti e ne conserva il valore. Il coniugio, quando necessario, sarà indicato separatamente.



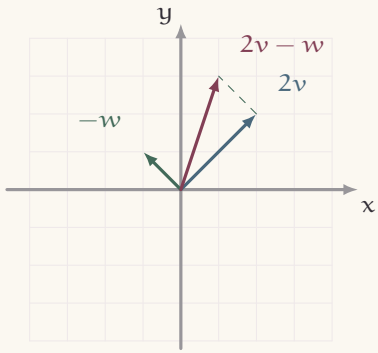
La colonna raccoglie i dati dello stesso vettore.

Esempio: costruire una combinazione

Siano $v = (1,1)^\mathsf{T}$, $w = (1,-1)^\mathsf{T}$.

$$\begin{aligned} 2v - w &= 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}2-1\\2-(-1)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si raddoppia v e si aggiunge il vettore opposto a w.



La costruzione geometrica segue lo stesso ordine della somma per componenti.

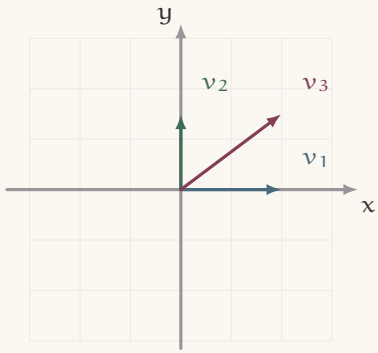
Indipendenza: nessuna direzione superflua

I vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono indipendenti se

$$\sum_k c_k v_k = 0 \quad \Rightarrow \quad c_k = 0 \text{ per ogni } k.$$

Se uno dei vettori si ottiene dagli altri, l'elenco è dipendente.

Per esempio $v_3 = v_1 + v_2$ produce la relazione non banale $v_1 + v_2 - v_3 = 0$.



L'indipendenza riguarda l'intero elenco, non soltanto coppie di vettori.

Esempio: indipendenza risolvendo le equazioni

Per $b_1 = (1,1)^T$, $b_2 = (1,-1)^T$ imponiamo

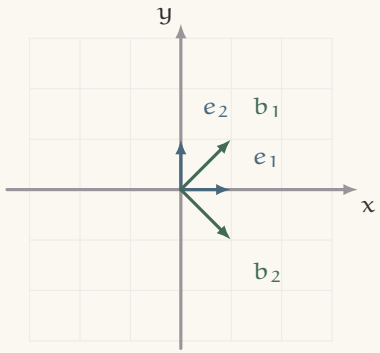
$$c_1 b_1 + c_2 b_2 = 0.$$

Le due componenti danno

$$c_1 + c_2 = 0, \qquad c_1 - c_2 = 0.$$

Sommando: $2c_1 = 0$, quindi $c_1 = 0$.

Dalla prima: $c_2 = -c_1 = 0$. I due vettori sono indipendenti.



Due basi del piano reale

Due direzioni indipendenti generano tutto il piano reale; gli stessi vettori formano anche una base di $\mathbb{C}^2$ sugli scalari complessi.

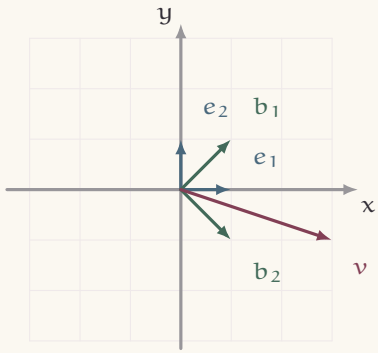
Base: rappresentare ogni vettore una sola volta

Una base è un elenco indipendente che genera lo spazio. Nella base $B = (b_1, \dots, b_n)$,

$$v = c_1 b_1 + \cdots + c_n b_n.$$

La colonna $[v]_B = (c_1, \dots, c_n)^T$ contiene le coordinate.

Se esistessero due scritture diverse, sottraendole otterremmo una relazione di dipendenza. Le coordinate sono quindi uniche.



Stesso vettore, assi diversi

Il vettore è l'oggetto; le coordinate sono la sua descrizione nella base scelta.

Perché le coordinate sono uniche

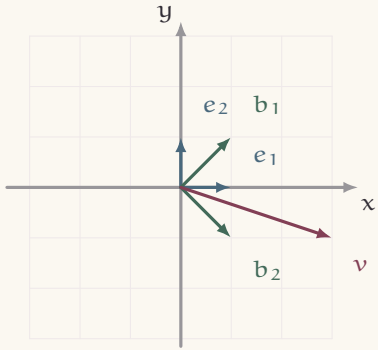
Supponiamo che una stessa base dia due scritture:

$$v = \sum_k c_k b_k = \sum_k d_k b_k.$$

Sottraendo membro a membro:

$$\sum_k (c_k - d_k) b_k = 0.$$

L'indipendenza dei vettori di base impone $c_k - d_k = 0$ per ogni k. Pertanto $c_k = d_k$: le due descrizioni coincidono.



Stesso vettore, assi diversi

Esempio: coordinate nella base delle diagonali

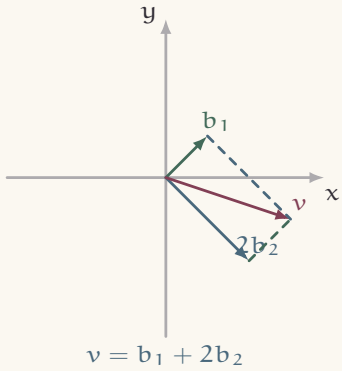
Scriviamo $v = (3, -1)^T$ nella base $b_1 = (1, 1)^T$, $b_2 = (1, -1)^T$:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{pmatrix}.$$

Sommando le equazioni: $2c_1 = 2$, dunque $c_1 = 1$.

Sottraendo: $2c_2 = 4$, dunque $c_2 = 2$.

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



Controllo: $(1, 1)^T + 2(1, -1)^T = (3, -1)^T$.

Dimensione e sottospazi

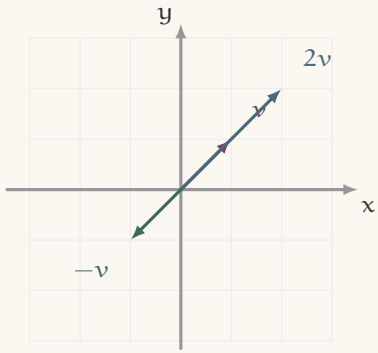
Il sottospazio generato da $v_1, \ldots, v_m$ contiene tutte le loro combinazioni lineari.

La dimensione è il numero di vettori di una base. In $\mathbb{C}^n$:

$$\dim \mathbb{C}^n = n.$$

Più di n vettori sono dipendenti; meno di n non possono generare tutto lo spazio.

Un vettore non nullo genera una retta complessa.



La figura mostra i multipli reali di v; i multipli complessi appartengono alla retta complessa generata da v.

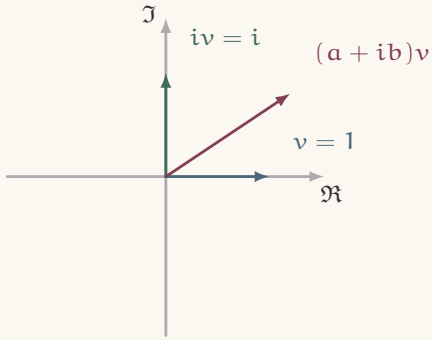
Una dimensione complessa, due parametri reali

I multipli complessi di un vettore non nullo v sono

$$(a + ib)v = av + b(iv), \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Occorre un solo coefficiente complesso, quindi la dimensione su $\mathbb{C}$ è uno. Quel coefficiente contiene però due parametri reali.

Per $v = 1$, l'insieme dei multipli complessi è tutto il piano dei numeri $a + ib$. I soli multipli reali occupano invece l'asse orizzontale.



Il campo degli scalari determina la dimensione.

Esempio: tre vettori in tre dimensioni

Siano $v_1 = (1,0,1)^T$, $v_2 = (0,1,1)^T$ e $v_3 = (1,1,0)^T$.
Imponiamo

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0.$$

Le tre componenti danno

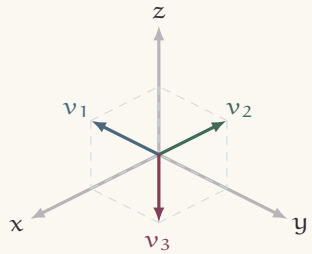
$$c_1 + c_3 = 0, \quad c_2 + c_3 = 0, \quad c_1 + c_2 = 0.$$

Dalle prime due: $c_1 = -c_3$ e $c_2 = -c_3$. Nella terza:

$$-2c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

I tre vettori sono indipendenti.

Tre direzioni in $\mathbb{R}^3$



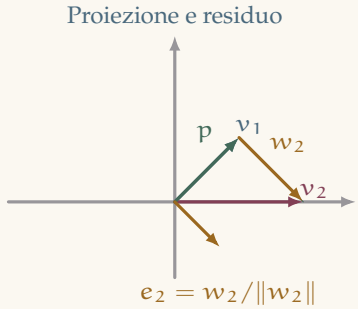
Tre coefficienti indipendenti

Le equazioni sono valide anche per coefficienti complessi: i vettori formano una base di $\mathbb{C}^3$.

Capitolo 3

Prodotto interno e ortogonalità

Per misurare lunghezze e proiezioni occorre un prodotto compatibile con i coefficienti complessi.



$$v_2 = p + w_2$$

Perché il prodotto interno usa il coniugio

Per $v = (1, i)^T$, la somma dei quadrati sarebbe

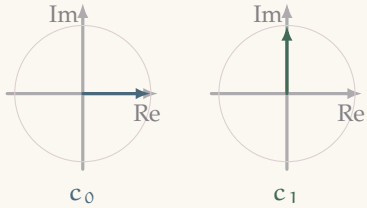
$$1^2 + i^2 = 1 - 1 = 0.$$

Il vettore però non è nullo. Il prodotto corretto dà

$$\begin{aligned}\langle v, v\rangle &= 1^* 1 + i^* i \\ &= 1 + (-i)i \\ &= 1 - i^2 = 2.\end{aligned}$$

Definiamo la norma come la radice di questo valore: $\|v\| = \sqrt{2}$.

1 e i: due moduli unitari



Un piano complesso per componente
Cerchi: modulo uno; stessa scala

Il coniugio rende la somma $\langle v, v\rangle = \sum_k |v_k|^2$ reale e non negativa.

Prodotto interno, aggiunto e linearità

Per una colonna u, la riga $u^\dagger$ si ottiene trasponendo e coniugando ogni componente:

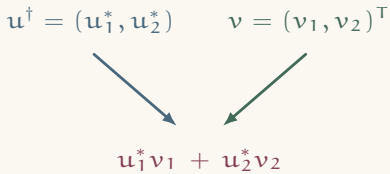
$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad u^\dagger = (u_1^*, u_2^*).$$

Il prodotto interno è

$$\langle u, v \rangle = u^\dagger v = \sum_k u_k^* v_k.$$

Nel secondo argomento gli scalari escono invariati; nel primo escono coniugati:

$$\langle \alpha u, \beta v \rangle = \alpha^* \beta \langle u, v \rangle.$$



Un prodotto fra componenti corrispondenti, seguito dalla somma.

Questa convenzione è lineare nel secondo argomento e antilineare nel primo.

Un esempio del ruolo dello scalare

Con $e = (1, 0)^\mathsf{T}$ e $v = (2, i)^\mathsf{T}$ otteniamo

$$\langle e, v \rangle = 1 \cdot 2 + 0 \cdot i = 2.$$

Moltiplicando il secondo argomento per i:

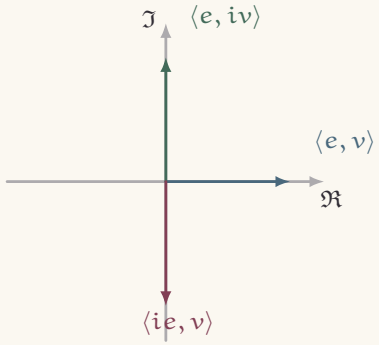
$$iv = (2i, -1)^\mathsf{T}, \quad \langle e, iv \rangle = 2i.$$

Moltiplicando il primo argomento:

$$ie = (i, 0)^\mathsf{T}, \quad (ie)^\dagger = (-i, 0),$$

$$\langle ie, v \rangle = (-i)2 + 0i = -2i.$$

Il coniugio determina il diverso segno.



Il primo argomento coniuga lo scalare.

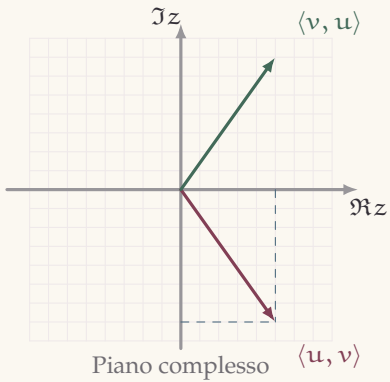
Esempio: un prodotto interno completo

Siano $u = (1+i, 2)^T$, $v = (3, 1-2i)^T$.

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= (1-i)3 + 2(1-2i)\\ &= 3 - 3i + 2 - 4i\\ &= 5 - 7i.\end{aligned}$$

Scambiando i vettori:

$$\begin{aligned}\langle v, u\rangle &= 3(1+i) + (1+2i)2\\ &= 3 + 3i + 2 + 4i = 5 + 7i.\end{aligned}$$



Lo scambio degli argomenti produce il coniugato, come richiede la definizione.

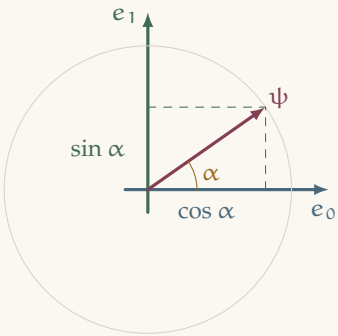
Norma, normalizzazione e ortogonalità

La norma misura la lunghezza attraverso il prodotto interno:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\sum_k |v_k|^2}.$$

Per $v \neq 0$ definiamo il versore $e = v/\|v\|$. La sua norma è uno:

$$\|e\|^2 = \frac{\langle v, v \rangle}{\|v\|^2} = 1.$$



Piano dei coefficienti reali

La normalizzazione conserva la direzione e rende unitaria la lunghezza.

Una base ortonormale seleziona le coordinate

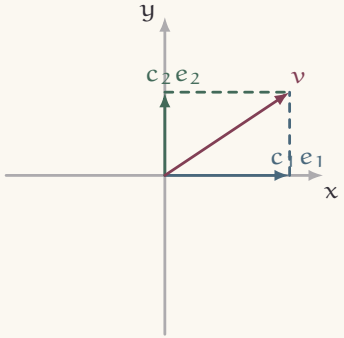
Due vettori sono ortogonali se il loro prodotto interno è zero. Una base è ortonormale quando i suoi vettori hanno norma uno e sono ortogonali fra loro. Usiamo il simbolo

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k, \\ 0 & j \neq k, \end{cases} \qquad \langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}.$$

Se $v = \sum_k c_k e_k$, allora

$$\langle e_j, v \rangle = \sum_k c_k \langle e_j, e_k \rangle = \sum_k c_k \delta_{jk} = c_j.$$

Tutti gli addendi si annullano, tranne quello con $k = j$.



Due componenti lungo gli assi della base.

Le coordinate si ricavano proiettando il vettore sui singoli assi ortonormali.

Esempio: normalizzare e verificare

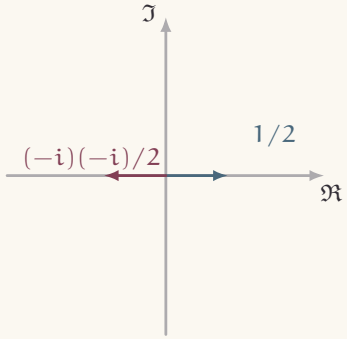
Con $v = (1, i)^\top$ poniamo

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Le due norme sono $\|e_1\|^2 = (|1|^2 + |i|^2)/2 = 1$ e $\|e_2\|^2 = (|1|^2 + |-i|^2)/2 = 1$.

$$\begin{aligned} \langle e_1, e_2 \rangle &= \frac{1}{2}[1 + (-i)(-i)] \\ &= \frac{1}{2}(1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

I due vettori formano una base ortonormale.



I contributi al prodotto interno si cancellano.

Il segno della fase della seconda componente rende i due vettori ortogonali.

Proiezione e residuo

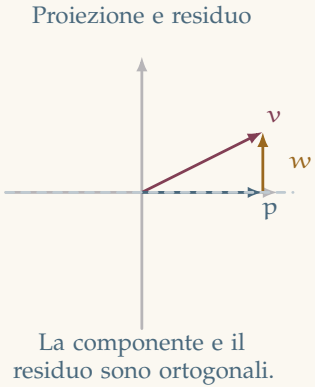
Per un versore e, la componente di v lungo e è

$$p = \langle e, v \rangle e.$$

Il residuo è $w = v - p$. Verifichiamo:

$$\begin{aligned} \langle e, w \rangle &= \langle e, v \rangle - \langle e, v \rangle \langle e, e \rangle \\ &= \langle e, v \rangle - \langle e, v \rangle = 0. \end{aligned}$$

La scomposizione $v = p + w$ è ortogonale.



Il prodotto interno fissa quanto sottrarre; il residuo non contiene più la direzione e.

Gram–Schmidt: costruire assi ortonormali

Da vettori indipendenti $v_1, \dots, v_m$ costruiamo:

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

Al passo k sottraiamo le componenti già note:

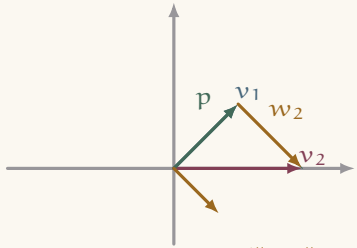
$$w_k = v_k - \sum_{j<k} \langle e_j, v_k \rangle e_j.$$

Poi normalizziamo:

$$e_k = \frac{w_k}{\|w_k\|}.$$

L'indipendenza garantisce $w_k \neq 0$.

Proiezione e residuo



La procedura conserva lo spazio generato e cambia la scelta della base.

La sottrazione elimina ogni componente precedente

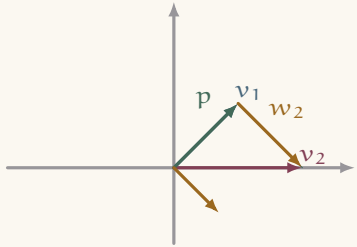
Supponiamo $e_1, \dots, e_{k-1}$ ortonormali. Per $\ell < k$, la linearità nel secondo argomento dà

$$\langle e_\ell, w_k \rangle = \langle e_\ell, v_k \rangle - \sum_{j<k} \langle e_j, v_k \rangle \langle e_\ell, e_j \rangle$$

$$= \langle e_\ell, v_k \rangle - \langle e_\ell, v_k \rangle = 0.$$

Nella somma rimane soltanto $j = \ell$, perché $\langle e_\ell, e_j \rangle = \delta_{\ell j}$. Dividere w_k per una norma positiva conserva tutte queste ortogonalità.

Proiezione e residuo



$e_2 = w_2 / \|w_2\|$

$v_2 = p + w_2$

La normalizzazione dà inoltre $\langle e_k, e_k \rangle$=1.

L'indipendenza garantisce una direzione residua

Se $w_k = 0$, la sua definizione imporrebbe

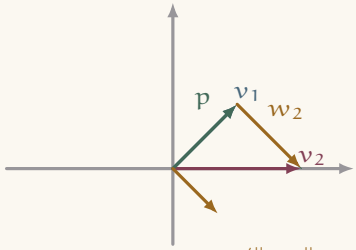
$$v_k = \sum_{j<k} \langle e_j, v_k \rangle e_j.$$

Ogni e_j è una combinazione di $v_1, \dots, v_j$, per la costruzione precedente. Quindi v_k apparterrebbe allo spazio generato da $v_1, \dots, v_{k-1}$, contro l'indipendenza iniziale. Pertanto $\|w_k\| > 0$ e

$$\|e_k\|^2 = \frac{\|w_k\|^2}{\|w_k\|^2} = 1.$$

Viceversa $v_k = w_k + \sum_{j<k} \langle e_j, v_k \rangle e_j$: lo spazio generato resta lo stesso.

Proiezione e residuo



Il passo iniziale normalizza v_1; il ragionamento dimostra per induzione l'intera procedura.

Esempio reale: sottrarre la componente

Siano $v_1 = (1,1)^\mathsf{T}$, $v_2 = (2,0)^\mathsf{T}$.

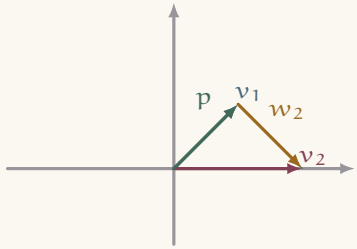
$$\|v_1\| = \sqrt{2}, \qquad e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^\mathsf{T}.$$

$$\langle e_1, v_2 \rangle = \frac{2+0}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

La proiezione è $\sqrt{2}e_1 = (1,1)^\mathsf{T}$.

$$w_2 = (2,0)^\mathsf{T} - (1,1)^\mathsf{T} = (1,-1)^\mathsf{T}.$$

Proiezione e residuo



$$v_2 = \mathrm{p} + w_2$$

Il segmento della figura che collega la proiezione a v_2 rappresenta il residuo w_2.

Esempio reale: normalizzare il residuo

Dal passo precedente $w_2 = (1, -1)^\mathsf{T}$.

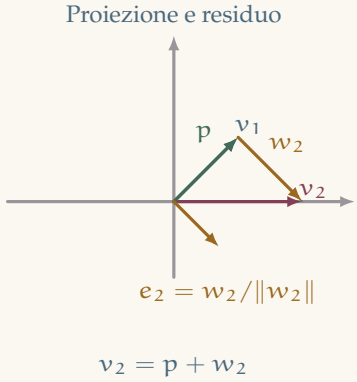
$$\|w_2\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^\mathsf{T}.$$

Verifichiamo entrambi i requisiti:

$$\|e_2\|^2 = \frac{1+1}{2} = 1,$$

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \frac{1-1}{2} = 0.$$

I due nuovi assi sono perpendicolari e unitari.



Lo stesso procedimento funziona con componenti complesse, rispettando il coniugio.

Esempio complesso: proiezione e residuo

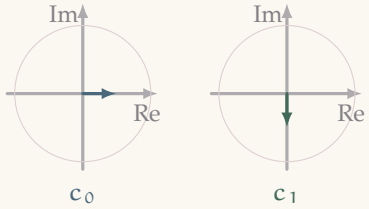
Siano $v_1 = (1, i)^T$, $v_2 = (1, 0)^T$.

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)^T.$$

$$\langle e_1, v_2 \rangle = \frac{1 \cdot 1 + (-i) \cdot 0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \end{pmatrix}.$$

$w_2 = (1, -i)^T/2$



Un piano complesso per componente
Cerchi: modulo uno; stessa scala

La proiezione è $(1/\sqrt{2})e_1 = (1,i)^T/2$; la sottrazione avviene componente per componente.

Esempio complesso: norma e controllo finale

Per $w_2 = (1/2, -i/2)^T$,

$$\|w_2\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

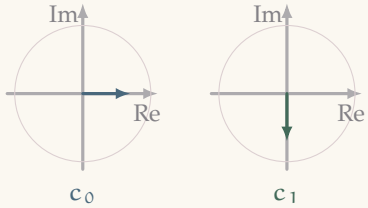
Quindi $\|w_2\| = 1/\sqrt{2}$ e $1/\|w_2\| = \sqrt{2}$:

$$e_2 = \sqrt{2}\, w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i)^T.$$

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \frac{1}{2}[1 + (-i)(-i)] = 0.$$

La norma di entrambi è uno: la base è ortonormale.

$e_2 = \sqrt{2}\, w_2$



Un piano complesso per componente
Cerchi: modulo uno; stessa scala

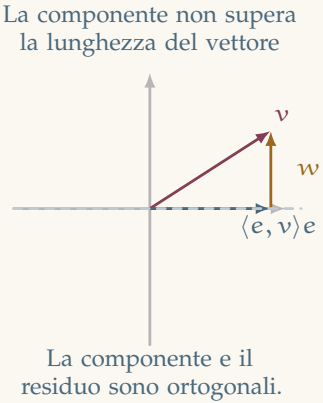
Controllo della norma: $\|e_2\|^2 = (|1|^2 + |-i|^2)/2 = (1+1)/2 = 1$.

La disuguaglianza di Cauchy–Schwarz

La disuguaglianza di Cauchy–Schwarz afferma:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|.$$

Nel caso reale, la componente di un vettore lungo una direzione non può superare la sua lunghezza. L'uguaglianza si ha per vettori linearmente dipendenti.



La proiezione ortogonale permette di dimostrare il risultato; seguirà un esempio numerico.

Separare la componente parallela

Siano $u, v \in \mathbb{C}^n$ e $u \neq 0$. Definiamo

$$a = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2}, \qquad r = v - au.$$

Il prodotto interno è lineare nel secondo argomento. Pertanto

$$\begin{aligned} \langle u, r \rangle &= \langle u, v - au \rangle \\ &= \langle u, v \rangle - a\langle u, u \rangle \\ &= \langle u, v \rangle - \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2}\|u\|^2 = 0. \end{aligned}$$

La decomposizione $v = au + r$ ha dunque due termini ortogonali.

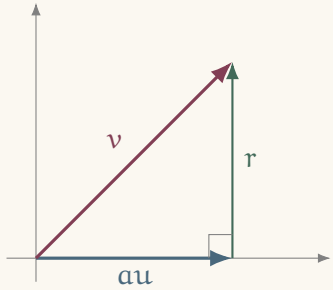


Illustrazione reale:
$u = (1, 0)$, $v = (1, 1)$, $a = 1$.

Il prodotto interno definisce l'ortogonalità anche quando le componenti sono complesse.

Sviluppare la norma dei due termini

Da $v = au + r$ otteniamo tutti e quattro i termini:

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &= \langle au + r, au + r\rangle \\ &= |a|^2\langle u, u\rangle + a^*\langle u, r\rangle \\ &\quad + a\langle r, u\rangle + \langle r, r\rangle \\ &= |a|^2\|u\|^2 + 0 + 0 + \|r\|^2.\end{aligned}$$

Infatti $\langle r, u\rangle = \langle u, r\rangle^* = 0$. Sostituendo a:

$$\|v\|^2 = \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|u\|^4}\|u\|^2 + \|r\|^2 = \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|u\|^2} + \|r\|^2.$$

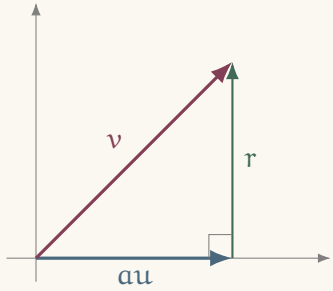


Illustrazione reale:
$u = (1, 0)$, $v = (1, 1)$, $a = 1$.

Il teorema di Pitagora deriva dall'annullamento dei due termini misti, anche con coefficienti complessi.

Ottenere la disuguaglianza e l'uguaglianza

Poiché $\|r\|^2 \geq 0$,

$$\frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|u\|^2} \leq \|v\|^2.$$

Moltiplicando per $\|u\|^2 > 0$ ed estraendo la radice non negativa:

$$|\langle u, v\rangle|^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2, \qquad |\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

L'uguaglianza richiede $\|r\|^2 = 0$, ossia $v = au$. Se $u = 0$, entrambi i membri valgono zero. In tutti i casi l'uguaglianza equivale alla dipendenza lineare.

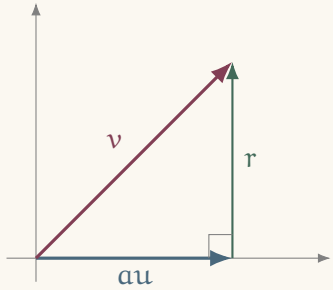


Illustrazione reale:
$u = (1, 0)$, $v = (1, 1)$, $a = 1$.

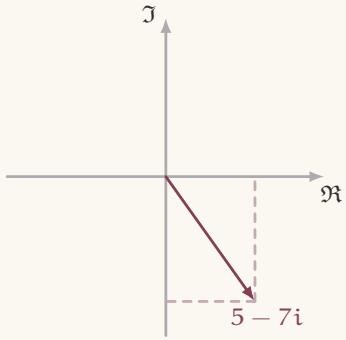
La componente ortogonale misura lo scarto dall'uguaglianza; segue ora il controllo con vettori complessi espliciti.

Verificare Cauchy–Schwarz sui numeri

Per $u = (1 + i, 2)^T$ e $v = (3, 1 - 2i)^T$ abbiamo già ottenuto $\langle u, v \rangle = 5 - 7i$.

$$\|u\|^2 = |1 + i|^2 + 4 = 1 + 1 + 4 = 6,$$
$$\|v\|^2 = 9 + |1 - 2i|^2 = 9 + 1 + 4 = 14,$$
$$|\langle u, v \rangle|^2 = 5^2 + (-7)^2 = 25 + 49 = 74.$$

Pertanto $74 \leq 6 \cdot 14 = 84$. Per due vettori normalizzati il modulo quadro del prodotto interno è quindi compreso fra zero e uno.



Il modulo quadro vale 74.

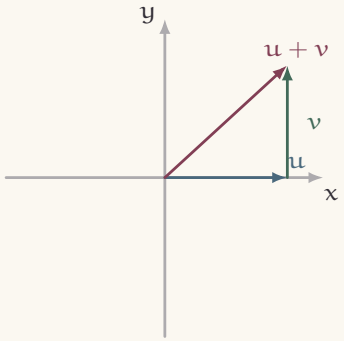
La lunghezza della somma

La disuguaglianza triangolare afferma

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Nel piano reale, il percorso diretto lungo $u + v$ non supera la lunghezza del percorso che segue prima u e poi v.

La stessa disuguaglianza vale per vettori complessi, con la norma definita dal prodotto interno coniugato. La dimostrazione segue da Cauchy–Schwarz; il disegno illustra il caso reale.



Somma punta-coda e percorso diretto

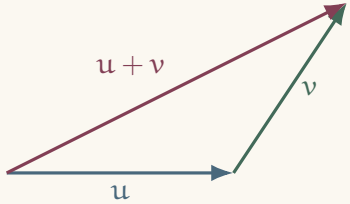
Il triangolo collega la norma della somma alle norme dei due addendi.

Dimostrare la disuguaglianza triangolare

Sviluppiamo il quadrato della norma:

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle \\ &\quad + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\Re\langle u,v\rangle + \|v\|^2 \\ &\le \|u\|^2 + 2|\langle u,v\rangle| + \|v\|^2 \\ &\le \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2.\end{aligned}$$

La prima stima usa $\Re z \le |z|$; la seconda usa Cauchy–Schwarz. La radice non negativa dà $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$.



$u = (2,0), v = (1,3/2)$
$\|u+v\| = 3\sqrt{5}/2 \le 2 + \sqrt{13}/2$

Le proprietà del prodotto interno trasformano il triangolo reale in un risultato valido su ogni spazio complesso finito.

Esempio: le tre lunghezze del triangolo

Per i vettori $u = (2, 0)$ e $v = (1, 3/2)$ della figura:

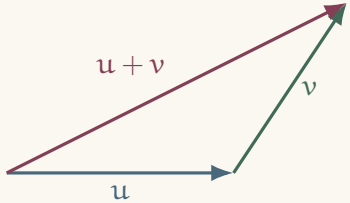
$$\|u\| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2,$$

$$\|v\| = \sqrt{1^2 + (3/2)^2} = \sqrt{1 + 9/4} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

La somma è $u + v = (3, 3/2)$, quindi

$$\|u + v\| = \sqrt{9 + 9/4} = \frac{\sqrt{45}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

Numericamente $3\sqrt{5}/2 \simeq 3{,}3541$, mentre
$2 + \sqrt{13}/2 \simeq 3{,}8028$: la disuguaglianza è stretta.



$u = (2, 0), v = (1, 3/2)$
$\|u + v\| = 3\sqrt{5}/2 \leq 2 + \sqrt{13}/2$

I due vettori hanno direzioni differenti; il percorso spezzato è più lungo del segmento risultante.

Le ampiezze del primo modulo diventano un vettore

La preparazione già descritta dalle ampiezze 0,6 e 0,8i ha due coordinate nella base di lettura H/V. Introduciamo la notazione di Dirac dopo aver costruito vettori, basi e prodotto interno.

Fissiamo $|0\rangle \leftrightarrow (1,0)^{\mathsf{T}}$ e $|1\rangle \leftrightarrow (0,1)^{\mathsf{T}}$.

$$|\psi\rangle = \frac{3}{5}|0\rangle + \frac{4i}{5}|1\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4i/5 \end{pmatrix}.$$

Nella realizzazione scelta, 0 corrisponde a H e 1 a V.

Base H/V: $a_H = 3/5$, $a_V = 4i/5$

↓

Base $|0\rangle, |1\rangle$: $c_0 = 3/5$, $c_1 = 4i/5$

Stessa preparazione; etichette dichiarate.

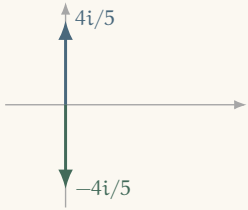
Il ket indica il vettore; la colonna ne raccoglie le coordinate nella base scelta. Le proprietà dello stato saranno sviluppate nella parte III.

La riga che calcola il prodotto interno

Il prodotto interno complesso richiede il coniugio nel primo argomento. Il bra raccoglie proprio i coefficienti coniugati necessari a eseguire quel calcolo.

$$|\psi\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4i/5 \end{pmatrix}, \qquad \langle\psi| \leftrightarrow (3/5, -4i/5).$$

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi\rangle &= \frac{3}{5}\frac{3}{5} + \left(-\frac{4i}{5}\right)\frac{4i}{5} \\ &= \frac{9}{25} - \frac{16i^2}{25} \\ &= \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1. \end{aligned}$$



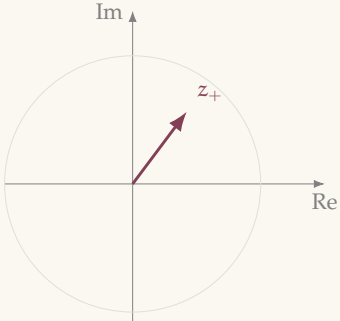
Coniugare riflette la componente rispetto all'asse reale.

La costruzione del bra coniuga gli scalari. Un bra fissato agisce linearmente sul ket che riceve.

La proiezione sulla direzione +

Riprendiamo $|\psi\rangle = (3/5, 4i/5)^T$ nella base H/V. La direzione $|+\rangle = (1,1)^T/\sqrt{2}$ ha bra $\langle +| = (1,1)/\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} z_+ = \langle +|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4i/5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1(3/5) + 1(4i/5)}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{3+4i}{5\sqrt{2}}. \end{aligned}$$



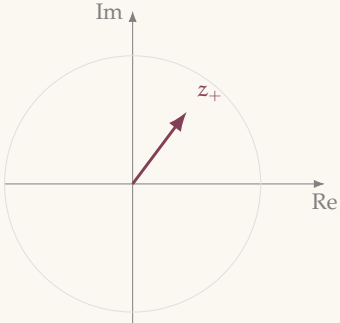
La freccia rappresenta il coefficiente finale; il raggio è $1/\sqrt{2}$.

Il prodotto interno fornisce un'ampiezza; il suo modulo quadro fornisce la probabilità.

Il modulo quadro della proiezione +

Per la stessa preparazione $|\psi\rangle = (3/5, 4i/5)^T$, abbiamo $z_+ = (3+4i)/(5\sqrt{2})$. Il denominatore al quadrato vale $5^2(\sqrt{2})^2 = 25 \cdot 2 = 50$.

$$\begin{aligned} |z_+|^2 &= \frac{(3-4i)(3+4i)}{50} \\ &= \frac{9+12i-12i-16i^2}{50} \\ &= \frac{9+0+16}{50} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



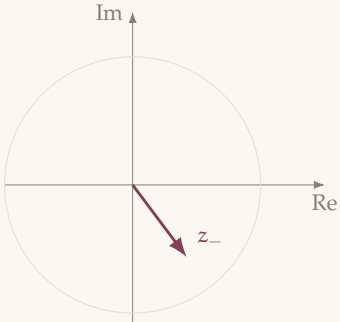
La freccia rappresenta il coefficiente finale; il raggio è $1/\sqrt{2}$.

Il prodotto per il coniugato cancella le parti immaginarie. I due esiti sommano a $1/2 + 1/2 = 1$.

La proiezione sulla direzione -

Riprendiamo $|\psi\rangle = (3/5, 4i/5)^T$ nella base H/V. La direzione $|-\rangle = (1,-1)^T/\sqrt{2}$ ha bra $\langle -| = (1,-1)/\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} z_- = \langle -|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4i/5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1(3/5) + (-1)(4i/5)}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{3-4i}{5\sqrt{2}}. \end{aligned}$$



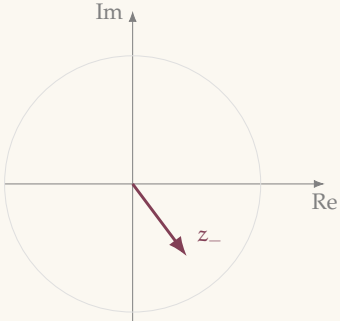
La freccia rappresenta il coefficiente finale; il raggio è $1/\sqrt{2}$.

Il prodotto interno fornisce un'ampiezza; il suo modulo quadro fornisce la probabilità.

Il modulo quadro della proiezione -

Per la stessa preparazione $|\psi\rangle = (3/5, 4i/5)^T$, abbiamo $z_- = (3-4i)/(5\sqrt{2})$. Il denominatore al quadrato vale $5^2(\sqrt{2})^2 = 25 \cdot 2 = 50$.

$$\begin{aligned} |z_-|^2 &= \frac{(3+4i)(3-4i)}{50} \\ &= \frac{9 - 12i + 12i - 16i^2}{50} \\ &= \frac{9 + 0 + 16}{50} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



La freccia rappresenta il coefficiente finale; il raggio è $1/\sqrt{2}$.

Il prodotto per il coniugato cancella le parti immaginarie. I due esiti sommano a $1/2 + 1/2 = 1$.

Confrontare le distribuzioni nelle due basi

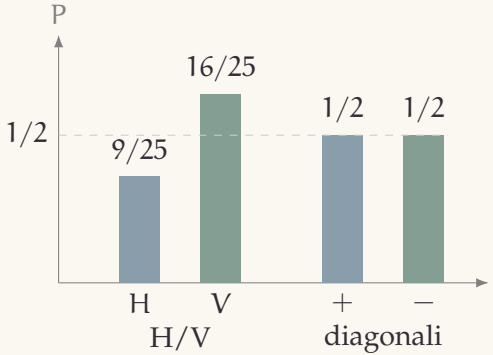
La preparazione resta $|\psi\rangle = (3/5, 4\mathrm{i}/5)^{\mathsf{T}}$. Nella base H/V:

$$P(H) = \left|\frac{3}{5}\right|^2 = \frac{9}{25}, \qquad P(V) = \left|\frac{4\mathrm{i}}{5}\right|^2 = \frac{16}{25}.$$

Nella base diagonale abbiamo calcolato

$$P(+) = \frac{1}{2}, \qquad P(-) = \frac{1}{2}.$$

Ogni coppia somma a uno: $(9+16)/25 = 1$ e $(1+1)/2 = 1$. La base determina quali proiezioni vengono osservate.

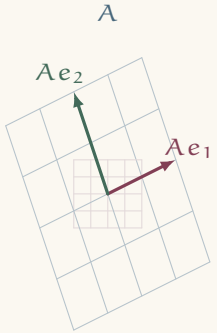


Le altezze hanno la stessa scala; ciascuna barra riporta esito e probabilità.

Capitolo 4

Matrici e trasformazioni lineari

Conoscere l'immagine dei vettori di base permette di trasformare qualsiasi vettore.



Grigio: prima Blu: dopo

Linearità e costruzione della matrice

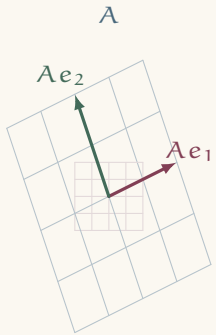
Una trasformazione T è lineare se

$$T(\alpha v + \beta w) = \alpha T(v) + \beta T(w).$$

Per $v = \sum_k c_k e_k$,

$$T(v) = \sum_k c_k T(e_k).$$

Le coordinate di $T(e_k)$ costituiscono la colonna k della matrice. Occorre fissare una base nel dominio e una nel codominio.



Grigio: prima Blu: dopo

Il dominio è lo spazio dei dati in ingresso; il codominio contiene i risultati. Una matrice $m \times n$ ha n colonne e m righe.

Esempio: dalla legge alle colonne

Consideriamo $T(x, y) = (2x - y, x + 3y)$.

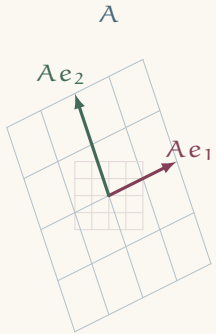
$$T(1, 0) = (2 \cdot 1 - 0, 1 + 3 \cdot 0) = (2, 1),$$
$$T(0, 1) = (2 \cdot 0 - 1, 0 + 3 \cdot 1) = (-1, 3).$$

Le immagini diventano le colonne:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Per $(x, y)^T$,

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}.$$



Grigio: prima Blu: dopo

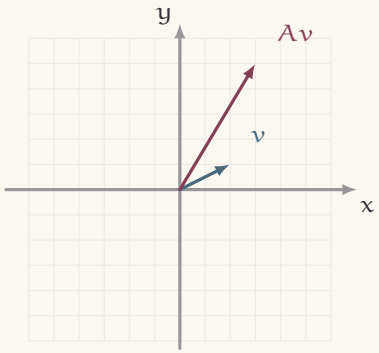
Il prodotto matrice-vettore ricostruisce la legge di partenza.

Esempio: trasformare un vettore

Applichiamo A a $v = (2,1)^T$:

$$\begin{aligned} Av &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Equivalentemente, $Av = 2Ae_1 + Ae_2$.



Le due letture, per righe e per colonne, danno lo stesso vettore.

Comporre due trasformazioni

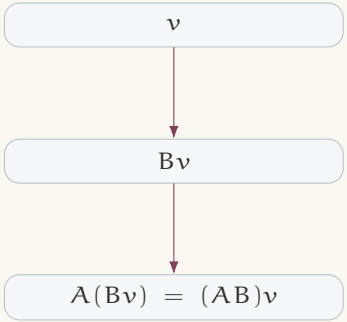
Il prodotto AB applica prima B, poi A:

$$v \longmapsto Bv \longmapsto A(Bv).$$

L'elemento (i, j) è

$$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}.$$

La riga di A incontra la colonna di B. L'ordine dei fattori può cambiare il risultato.



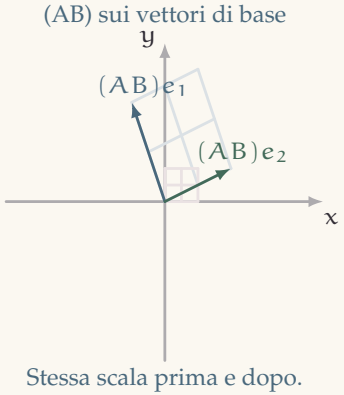
Il fattore più a destra agisce per primo.

Esempio: il prodotto AB

Usiamo $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ e $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

$$(AB)_{11} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1,$$
$$(AB)_{12} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 2,$$
$$(AB)_{21} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3,$$
$$(AB)_{22} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 1.$$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$



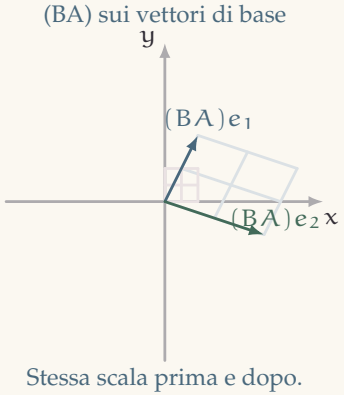
La griglia mostra la composizione completa: prima lo scambio degli assi, poi A.

Esempio: invertire l'ordine, BA

Ora è B a fornire le righe:

$$(BA)_{11} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1,$$
$$(BA)_{12} = 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 3,$$
$$(BA)_{21} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 2,$$
$$(BA)_{22} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 = -1.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \neq AB.$$



Lo scambio nell'ordine produce immagini diverse degli stessi vettori di base.

Determinante e inversa

Per una matrice 2×2,

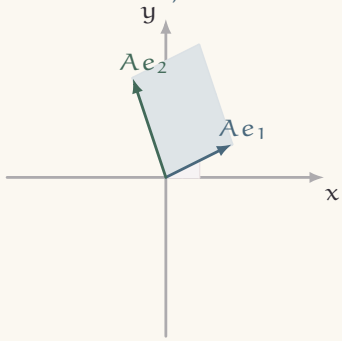
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det A = ad - bc.$$

Se $\det A \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Nel piano reale, $|\det A|$ è il fattore con cui cambiano le aree. Un determinante nullo segnala la perdita di una direzione.

Area iniziale 1, area finale 7



Stessa scala prima e dopo.

L'identità I conserva ogni vettore. Per l'inversa devono valere entrambi i prodotti $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Verificare la formula dell'inversa

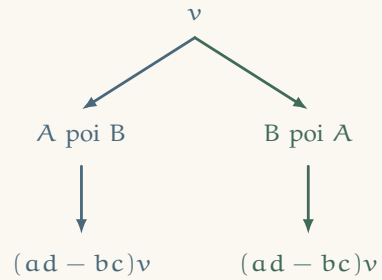
Poniamo $B = \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$. Il prodotto riga per colonna dà

$$AB = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} = (ad - bc)I.$$

Nell'ordine opposto:

$$BA = \begin{pmatrix} da - bc & db - bd \\ -ca + ac & -cb + ad \end{pmatrix} = (ad - bc)I.$$

Se $ad - bc \neq 0$, dividendo B per questo numero si ottiene l'inversa. La formula vale per coefficienti reali o complessi.



La divisione finale restituisce v.

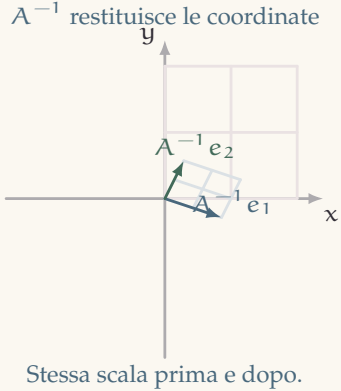
Esempio: calcolare e verificare l'inversa

Per $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$:

$$\det A = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 = 7.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$AA^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6+1 & 2-2 \\ 3-3 & 1+6 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = I.$$



L'inversa ricostruisce le coordinate precedenti alla trasformazione.

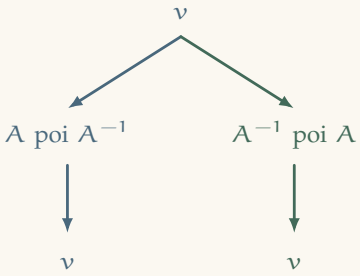
Controllare l'inversa nei due ordini

Scriviamo gli elementi prima di semplificarli:

$$AA^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2\cdot 3+(-1)(-1) & 2\cdot 1+(-1)2 \\ 1\cdot 3+3(-1) & 1\cdot 1+3\cdot 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3\cdot 2+1\cdot 1 & 3(-1)+1\cdot 3 \\ (-1)2+2\cdot 1 & (-1)(-1)+2\cdot 3 \end{pmatrix}.$$

Entrambi diventano $\frac{1}{7}\left(\begin{smallmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{I}$.



Il ritorno vale in entrambi gli ordini.

Invertire una composizione

Per matrici invertibili:

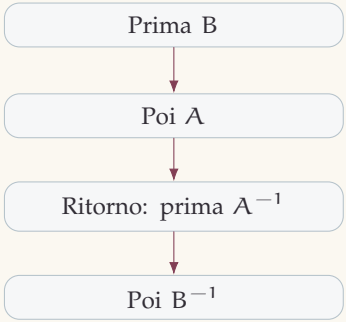
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Infatti

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\ &= AIA^{-1} = I.\end{aligned}$$

Il determinante soddisfa

$$\det(AB) = \det A \det B, \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$



Le proprietà del determinante sono assunte come risultati generali; l'ordine dell'inversa è verificato mediante i prodotti.

Il controllo nell'altro ordine

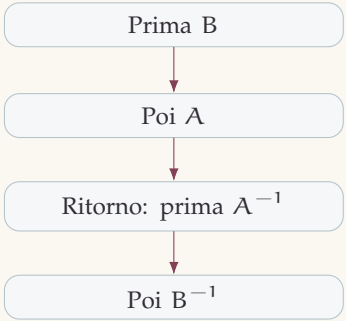
Il candidato inverso deve funzionare anche a sinistra:

$$\begin{aligned}(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B \\ &= B^{-1}IB \\ &= B^{-1}B = I.\end{aligned}$$

Per il determinante dell'inversa, la regola del prodotto dà

$$1 = \det I = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}.$$

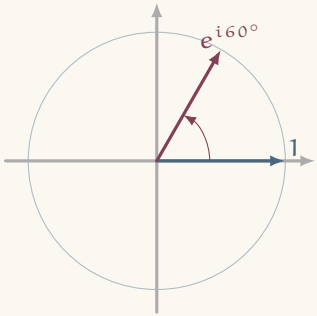
Poiché $\det A \neq 0$, dividiamo e otteniamo $\det A^{-1} = 1/\det A$.



Capitolo 5

Aggiunto, hermitiane e unitarie

Il coniugio distingue gli operatori che descrivono osservabili da quelli che trasformano reversibilmente gli stati.



Modulo unitario, fase variabile

Trasposta, coniugata e aggiunta

Per $A = (A_{ij})$ definiamo

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}, \quad (A^*)_{ij} = A^*_{ij},$$

$$A^\dagger = (A^T)^*.$$

L'aggiunta scambia righe e colonne e coniuga i coefficienti.

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger.$$

Per matrici reali, $A^\dagger = A^T$.

Elementi di $A^\dagger$

	1	2
1	a^*_{11}	a^*_{21}
2	a^*_{12}	a^*_{22}

L'elemento $(1,2)$ di A arriva in $(2,1)$ e viene coniugato.

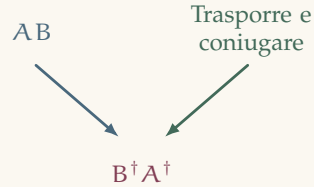
L'asterisco indica qui il coniugio elemento per elemento; il pugnale indica l'aggiunto.

Perché l'aggiunto inverte l'ordine

Seguiamo l'elemento in posizione (i, j):

$$\begin{aligned}((AB)^\dagger)_{ij} &= (AB)^*_{ji} \\ &= \left(\sum_k A_{jk} B_{ki}\right)^* \\ &= \sum_k A^*_{jk} B^*_{ki} \\ &= \sum_k (B^\dagger)_{ik} (A^\dagger)_{kj} \\ &= (B^\dagger A^\dagger)_{ij}.\end{aligned}$$

I coefficienti sono scalari, quindi il loro ordine nel singolo prodotto può essere scambiato.



Le posizioni degli indici determinano l'ordine.

Esempio: tre operazioni diverse

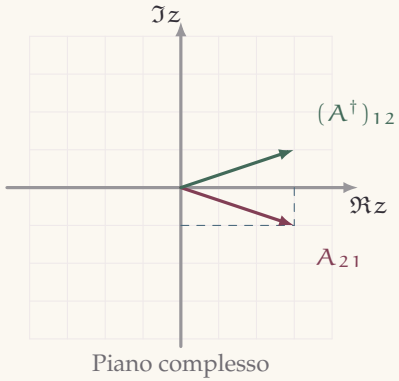
Sia $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2+i \\ 3-i & 4i \end{smallmatrix}\right)$.

$$A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3-i \\ 2+i & 4i \end{pmatrix},$$

$$A^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ 3+i & -4i \end{pmatrix},$$

$$A^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1 & 3+i \\ 2-i & -4i \end{pmatrix}.$$

Per esempio $(A^{\dagger})_{12} = (A_{21})^{*} = 3+i$.



Piano complesso

Il coniugio riflette il coefficiente nel piano complesso; la trasposizione ne cambia la posizione nella matrice.

L'aggiunto e il prodotto interno

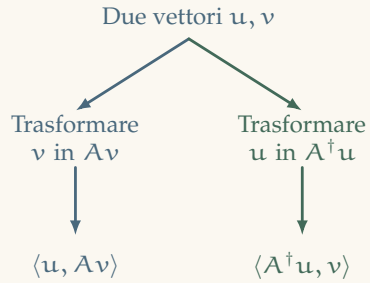
L'aggiunto è caratterizzato da

$$\langle u, Av \rangle = \langle A^\dagger u, v \rangle.$$

Nelle coordinate ortonormali:

$$\begin{aligned} \langle A^\dagger u, v \rangle &= (A^\dagger u)^\dagger v \\ &= u^\dagger (A^\dagger)^\dagger v \\ &= u^\dagger A v. \end{aligned}$$

Questa identità permette di trasferire un operatore da un argomento all'altro.



I due percorsi restituiscono lo stesso scalare.

Il trasferimento richiede l'aggiunto: non basta usare la stessa matrice.

Matrici hermitiane

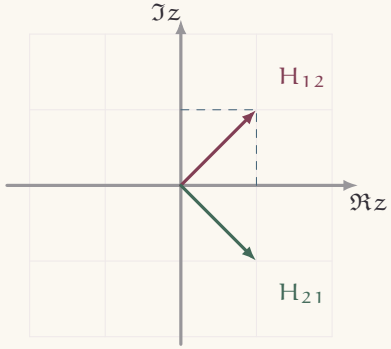
Una matrice è hermitiana se

$$H^\dagger = H.$$

La diagonale è reale; gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale sono coniugati:

$$H = \begin{pmatrix} a & z \\ z^* & d \end{pmatrix}, \qquad a, d \in \mathbb{R}.$$

Per esempio $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{smallmatrix}\right)$ è hermitiana.



Piano complesso

Le osservabili del modello finito saranno descritte da matrici hermitiane.

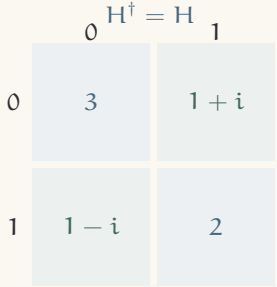
Controllare la matrice hermitiana

Trasponiamo e coniughiamo la matrice dell'esempio:

$$H^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix},$$

$$H^{\dagger} = \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix} = H.$$

Gli elementi diagonali restano invariati perché sono reali. Lo scambio delle posizioni e il coniugio riportano ciascun elemento fuori diagonale al valore iniziale.



Le due celle fuori diagonale si corrispondono.

Matrici unitarie

Una matrice quadrata è unitaria se

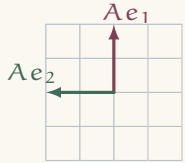
$$U^\dagger U = I, \qquad U^{-1} = U^\dagger.$$

Conserva tutti i prodotti interni:

$$\begin{aligned}\langle Uu, Uv\rangle &= u^\dagger U^\dagger U v \\ &= u^\dagger v = \langle u, v\rangle.\end{aligned}$$

In particolare $\|Uv\| = \|v\|$. Le colonne di U formano una base ortonormale.

Esempio reale: rotazione



Grigio: prima Blu: dopo

Le evoluzioni di un sistema isolato e le porte ideali del corso sono unitarie.

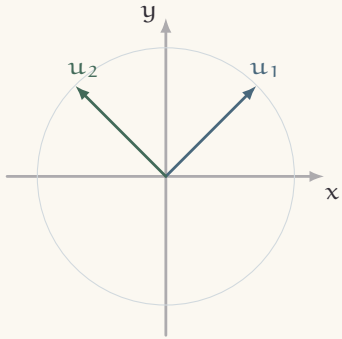
Le colonne di una matrice unitaria

Indichiamo con u_j la colonna j di U. L'elemento (j,k) del prodotto è

$$(U^\dagger U)_{jk} = \sum_i U^*_{ij} U_{ik} = \langle u_j, u_k \rangle.$$

Se $U^\dagger U = I$, questo valore è δ_{jk}: ogni colonna ha norma uno e colonne diverse sono ortogonali.

Viceversa, colonne ortonormali producono esattamente gli elementi della matrice identità.



Due colonne reali di norma uno

Esempio: verificare l'unitarietà

Consideriamo

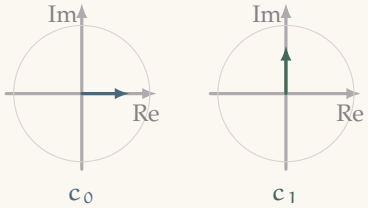
$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

$$U^\dagger U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-i)i & i-i \\ -i+i & (-i)i+1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $(-i)i = -i^2 = 1$,

$$U^\dagger U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I.$$

Prima colonna di U



Un piano complesso per componente
Cerchi: modulo uno; stessa scala

Le due colonne hanno norma uno e prodotto interno nullo.

Esempio: trasformazione e norma conservata

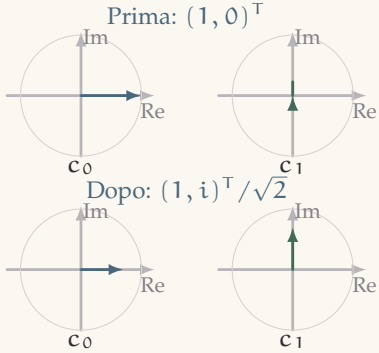
Applichiamo la stessa U a $v = (1, 0)^T$:

$$Uv = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + i \cdot 0 \\ i \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

$$\|Uv\|^2 = \frac{|1|^2 + |i|^2}{2} = 1 = \|v\|^2.$$

Il ritorno dà

$$U^\dagger Uv = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (-i)i \\ -i + i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



La norma è conservata anche quando il vettore acquista una componente immaginaria.

Confrontare hermitianità e unitarietà

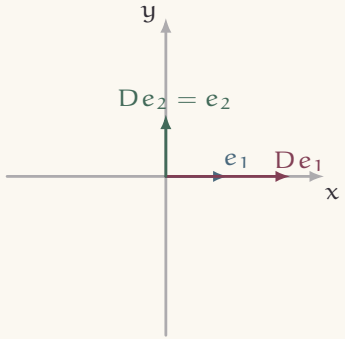
Le due condizioni rispondono a domande diverse.

$$H^\dagger = H \qquad \text{e} \qquad U^\dagger U = I.$$

Per $D = \mathrm{diag}(2, 1)$, l'aggiunto coincide con D, ma

$$D^\dagger D = \mathrm{diag}(4, 1) \neq I.$$

Il vettore e_1 passa a $2e_1$ e la sua norma raddoppia.
L'identità, invece, soddisfa entrambe le condizioni.



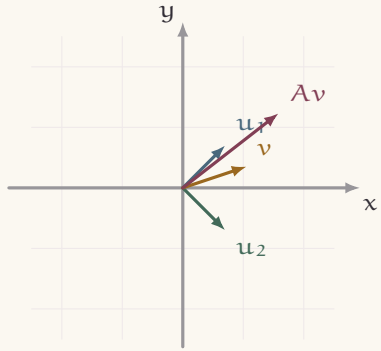
La direzione orizzontale viene dilatata.

Le classi possono intersecarsi senza che una sia contenuta nell'altra.

Capitolo 6

Autovalori e autovettori

Alcune direzioni non vengono mescolate dalla trasformazione. In quelle direzioni il calcolo si riduce a uno scalare.



Esempio reale: direzioni proprie

Direzioni invarianti

Un vettore $v \neq 0$ è un autovettore di A se

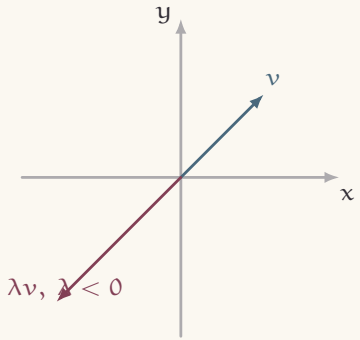
$$Av = \lambda v.$$

Lo scalare λ è il suo autovalore. La condizione equivale a

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

Per una matrice quadrata deve quindi valere

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$



Stessa retta, verso opposto

Nel caso complesso la retta generata dall'autovettore è una retta complessa.

Perché il determinante deve annullarsi

Se $A - \lambda I$ fosse invertibile, dall'equazione

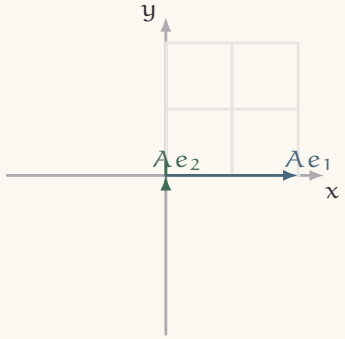
$$(A - \lambda I)v = 0$$

potremmo ricavare $v = (A - \lambda I)^{-1}0 = 0$, che è escluso dalla definizione di autovettore.

La matrice deve quindi perdere almeno una direzione: $\det(A - \lambda I) = 0$. Usiamo il risultato generale secondo cui una matrice quadrata è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero.

Per $\lambda = 0$ gli autovettori vengono mandati nel vettore nullo.

Una direzione viene annullata.



Stessa scala prima e dopo.

Esempio: costruire il polinomio caratteristico

Usiamo $H = \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det(H - \lambda I) &= (3-\lambda)(2-\lambda) \\ &\quad - (1+i)(1-i) \\ &= 6 - 5\lambda + \lambda^2 - 2 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 4. \end{aligned}$$

Il discriminante è $25 - 4 \cdot 4 = 9$.

$$\lambda = \frac{5 \pm 3}{2} \quad \Rightarrow \quad 4, 1.$$

Spettro dell'operatore



Valori propri reali

Il prodotto $(1+i)(1-i) = 2$ è un modulo quadro: il polinomio ha coefficienti reali.

Sviluppare il polinomio e le due radici

I due prodotti sono

$$(3-\lambda)(2-\lambda) = 6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2,$$
$$(1+i)(1-i) = 1 - i + i - i^2 = 2.$$

Pertanto il polinomio è $\lambda^2 - 5\lambda + 4$. Applicando la formula del secondo grado:

$$\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{9}}{2} = \frac{8}{2} = 4,$$
$$\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{9}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Spettro dell'operatore



Valori propri reali

Esempio: autovettore per $\lambda = 4$

Risolviamo $(H - 4I)v = 0$:

$$-x + (1+i)y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = (1+i)y.$$

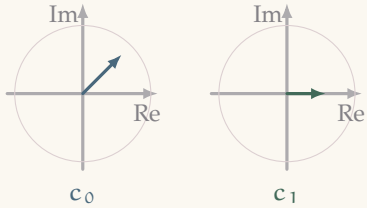
Con $y = 1$, scegliamo $v_1 = (1+i, 1)^T$.

$$\|v_1\|^2 = |1+i|^2 + 1 = 2 + 1 = 3.$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La seconda riga conferma:
$(1-i)(1+i) - 2 = 2 - 2 = 0$.

u_1: autovalore 4



Un piano complesso per componente
Cerchi: modulo uno; stessa scala

Un autovettore si può moltiplicare per qualsiasi scalare non nullo; scegliamo norma uno.

Esempio: autovettore per $\lambda = 1$

Da $(H - I)v = 0$:

$$2x + (1+i)y = 0.$$

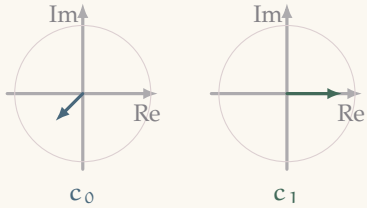
Scegliamo $y = 2$, quindi $x = -1 - i$.

$$\|v_2\|^2 = |-1-i|^2 + 4 = 2 + 4 = 6.$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1-i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \frac{(1-i)(-1-i)+2}{\sqrt{18}} = 0.$$

u_2: autovalore 1



Un piano complesso per componente
Cerchi: modulo uno; stessa scala

Il numeratore del prodotto interno è $-2 + 2 = 0$: gli autovettori sono ortogonali.

Controllare il secondo autovettore

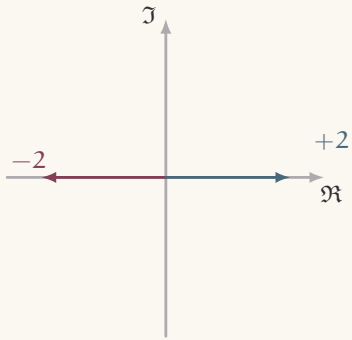
Per $v_2 = (-1-i, 2)^T$, la seconda riga di $(H - I)v_2$ vale

$$(1-i)(-1-i) + 2 = -1 - i + i + i^2 + 2$$
$$= -2 + 2 = 0.$$

Anche la prima riga si annulla:

$$2(-1-i) + (1+i)2 = -2 - 2i + 2 + 2i = 0.$$

Il numeratore di $\langle u_1, u_2 \rangle$ è lo stesso prodotto già calcolato, seguito da $+2$: il risultato è zero.



Le due componenti del controllo si cancellano.

Perché gli autovalori hermitiani sono reali

Siano $H v = \lambda v$ e $H^\dagger = H$.

$$\langle v, Hv \rangle = \lambda \langle v, v \rangle.$$

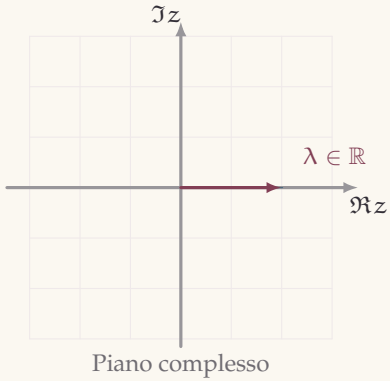
Ma, usando l'aggiunto,

$$\langle v, Hv \rangle = \langle Hv, v \rangle = \lambda^* \langle v, v \rangle.$$

Sottraendo,

$$(\lambda - \lambda^*) \|v\|^2 = 0.$$

Poiché $v \neq 0$, segue $\lambda = \lambda^* \in \mathbb{R}$.



Piano complesso

L'argomento usa insieme hermitianità, antilinearità e norma positiva.

Autovalori distinti, direzioni ortogonali

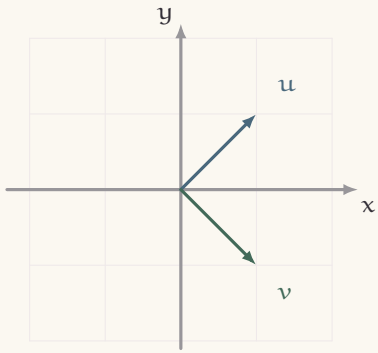
Siano $Hu = \lambda u$ e $Hv = \mu v$.

$$\langle u, Hv\rangle = \mu\langle u, v\rangle,$$
$$\langle Hu, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle.$$

Per l'hermitianità i due membri sono uguali:

$$(\mu - \lambda)\langle u, v\rangle = 0.$$

Se $\lambda \neq \mu$, allora $\langle u, v\rangle = 0$.



Gli autovalori λ e μ sono reali per il risultato precedente; la figura illustra una sezione reale dello spazio.

Degenerazione: un intero autospazio

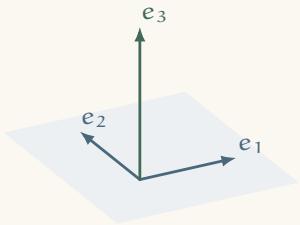
Per $D = \mathrm{diag}(2, 2, 5)$:

$$D \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tutte queste combinazioni appartengono all'autospazio $E_2 = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$, che ha dimensione due.

L'autospazio contiene anche zero; un autovettore è invece non nullo. La terza direzione soddisfa $De_3 = 5e_3$.

Due autospazi distinti



E_2: piano, dimensione 2
E_5: retta, dimensione 1

La degenerazione riguarda la dimensione dell'autospazio associato allo stesso autovalore.

Quando una base propria non esiste

Una matrice è diagonalizzabile quando lo spazio possiede una base di suoi autovettori.

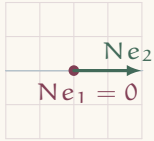
Per $N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$:

$$\det(N - \lambda I) = (-\lambda)(-\lambda) - 1 \cdot 0 = \lambda^2.$$

L'autovalore zero ha molteplicità algebrica due.
L'equazione $N(x, y)^T = (y, 0)^T = 0$ impone $y = 0$.

L'autospazio è quindi la retta $(x, 0)^T$: ha dimensione uno, insufficiente per una base del piano.

$N(x, y) = (y, 0)$



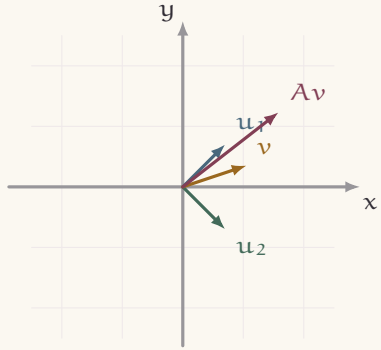
Grigio: prima Blu: dopo

La molteplicità geometrica è la dimensione dell'autospazio; quella algebrica conta le radici con ripetizione.

Capitolo 7

Diagonalizzazione e spettro

Nella base propria le componenti evolvono separatamente. I proiettori permettono di scrivere questa separazione senza scegliere coordinate.



Esempio reale: direzioni proprie

Teorema spettrale in dimensione finita

Ogni matrice hermitiana ammette una base ortonormale di autovettori.

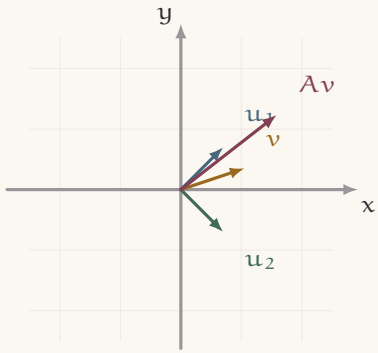
Raccogliendoli nelle colonne di U:

$$HU = UD, \qquad U^\dagger U = I.$$

Moltiplicando a sinistra per $U^\dagger$:

$$U^\dagger H U = D.$$

Equivalentemente $H = UDU^\dagger$.



Esempio reale: direzioni proprie

La dimostrazione seguente costruisce la base per induzione sulla dimensione. Gli esempi ne calcolano poi i vettori.

Il primo autovettore di una hermitiana

Sia $H = H^\dagger$ una matrice $n \times n$. Il polinomio $\det(H - \lambda I)$ ha una radice complessa, per il teorema fondamentale dell'algebra. Esiste quindi $u \neq 0$ con $Hu = \lambda u$. Normalizziamo u a norma uno. Allora

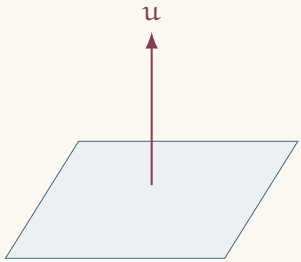
$$u^\dagger H u = \lambda u^\dagger u = \lambda.$$

D'altra parte,

$$(u^\dagger H u)^* = u^\dagger H^\dagger u = u^\dagger H u,$$

quindi $\lambda^* = \lambda$: l'autovalore è reale.

$\mathbb{C}^n = \mathrm{span}\{u\} \oplus u^\perp$



$u^\perp$: complemento ortogonale

Prerequisito dichiarato: ogni polinomio complesso non costante ha una radice. Il disegno schematizza la somma diretta.

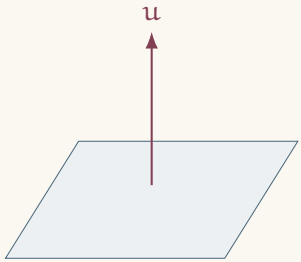
L'ortogonale al primo autovettore è invariante

Per $Hu = \lambda u$, con λ reale, prendiamo $w \in u^{\perp}$, cioè $u^{\dagger}w = 0$. Poiché H è hermitiana,

$$\begin{aligned} u^{\dagger}Hw &= (Hu)^{\dagger}w \\ &= (\lambda u)^{\dagger}w \\ &= \lambda u^{\dagger}w = 0. \end{aligned}$$

Pertanto $Hw \in u^{\perp}$. La restrizione di H a questo spazio è ancora hermitiana, perché conserva l'identità $v^{\dagger}Hw = (Hv)^{\dagger}w$ per $v, w \in u^{\perp}$.

$\mathbb{C}^n = \mathrm{span}\{u\} \oplus u^{\perp}$



$u^{\perp}$: complemento ortogonale

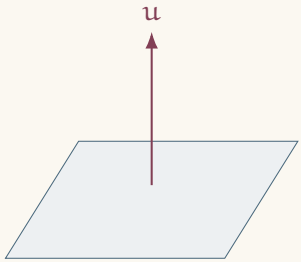
La trasformazione conserva separatamente la direzione propria e il suo complemento ortogonale.

Completare la base mediante induzione

In dimensione uno ogni vettore unitario è una base propria. Supponiamo il risultato valido in dimensione $n-1$. Lo spazio $u^\perp$ ha dimensione $n-1$ e la restrizione di H è hermitiana: ammette quindi una base propria ortonormale $u_2, \dots, u_n$. Aggiungendo $u_1 = u$ si ottiene una base di $\mathbb{C}^n$. Con $U = (u_1 \ \cdots \ u_n)$ e $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$:

$$HU = UD, \quad U^\dagger U = I, \quad H = UDU^\dagger.$$

$\mathbb{C}^n = \operatorname{span}\{u\} \oplus u^\perp$



$u^\perp$: complemento ortogonale

L'induzione costruisce l'intera base; la diagonalizzazione segue raccogliendo gli autovettori in colonne.

Le componenti proprie si trasformano separatamente

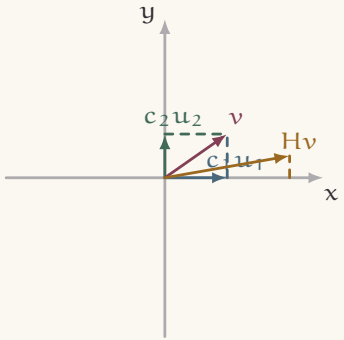
Scriviamo $v = c_1 u_1 + c_2 u_2$. Per linearità,

$$\begin{aligned} Hv &= c_1 H u_1 + c_2 H u_2 \\ &= \lambda_1 c_1 u_1 + \lambda_2 c_2 u_2. \end{aligned}$$

In coordinate proprie:

$$[Hv]_U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Gli zeri fuori diagonale esprimono l'assenza di mescolamento.



Esempio reale: due componenti trasformate.

Il disegno usa coordinate reali $c_1 = 1, c_2 = 0{,}7$ e autovalori $2, 1/2$: le componenti diventano 2 e 0,35. La formula a sinistra vale in generale.

Costruire e applicare il proiettore

Il prodotto colonna-riga produce una matrice:

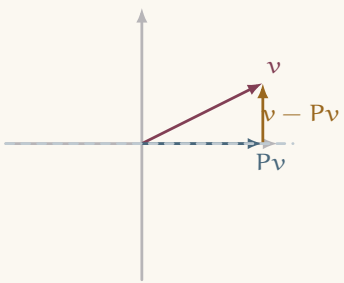
$$uu^\dagger = \begin{pmatrix} u_1 u_1^* & u_1 u_2^* \\ u_2 u_1^* & u_2 u_2^* \end{pmatrix}.$$

Applicandola a v:

$$(uu^\dagger)v = u(u^\dagger v) = \langle u, v\rangle u.$$

Il prodotto interno ricava il coefficiente lungo u; la moltiplicazione per u ricostruisce la componente selezionata. La normalizzazione di u è essenziale.

Proiezione e residuo



La componente e il residuo sono ortogonali.

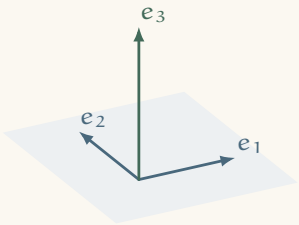
Il proiettore sulla direzione e_1

Riprendiamo $D = \mathrm{diag}(2,2,5)$ nella base ortonormale e_1, e_2, e_3. Il proiettore sulla direzione e_1 è il prodotto della colonna per la sua riga coniugata:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 & 1\cdot 0 & 1\cdot 0 \\ 0\cdot 1 & 0\cdot 0 & 0\cdot 0 \\ 0\cdot 1 & 0\cdot 0 & 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Due autospazi distinti



E_2: piano, dimensione 2
E_5: retta, dimensione 1

Il proiettore Q_1 conserva la componente 1 e annulla le altre; gli indici indicano le direzioni della base.

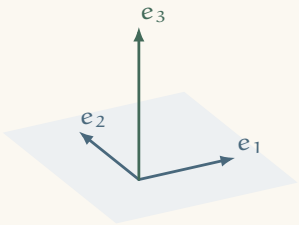
Il proiettore sulla direzione e_2

Riprendiamo $D = \mathrm{diag}(2,2,5)$ nella base ortonormale e_1, e_2, e_3. Il proiettore sulla direzione e_2 è il prodotto della colonna per la sua riga coniugata:

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 & 0\cdot 1 & 0\cdot 0 \\ 1\cdot 0 & 1\cdot 1 & 1\cdot 0 \\ 0\cdot 0 & 0\cdot 1 & 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Due autospazi distinti



E_2: piano, dimensione 2
E_5: retta, dimensione 1

Il proiettore Q_2 conserva la componente 2 e annulla le altre; gli indici indicano le direzioni della base.

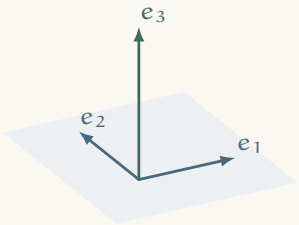
Il proiettore sulla direzione e_3

Riprendiamo $D = \mathrm{diag}(2,2,5)$ nella base ortonormale e_1, e_2, e_3. Il proiettore sulla direzione e_3 è il prodotto della colonna per la sua riga coniugata:

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 & 0\cdot 0 & 0\cdot 1 \\ 0\cdot 0 & 0\cdot 0 & 0\cdot 1 \\ 1\cdot 0 & 1\cdot 0 & 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Due autospazi distinti



E_2: piano, dimensione 2
E_5: retta, dimensione 1

Il proiettore Q_3 conserva la componente 3 e annulla le altre; gli indici indicano le direzioni della base.

Il proiettore sull'intero autospazio

L'esito 2 raccoglie entrambe le direzioni e_1, e_2. Il suo proiettore è

$$\begin{aligned} P_2 &= Q_1 + Q_2 \\ &= \mathrm{diag}(1+0, 0+1, 0) \\ &= \mathrm{diag}(1, 1, 0). \end{aligned}$$

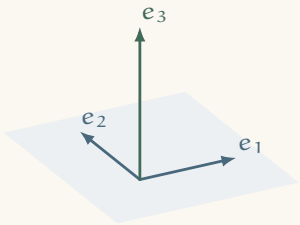
L'esito 5 ha $P_5 = Q_3 = \mathrm{diag}(0, 0, 1)$. Per $v = (a, b, c)^T$:

$$P_2 v = (a, b, 0)^T, \qquad P_5 v = (0, 0, c)^T.$$

Quindi $P_2 v + P_5 v = v$ e

$$2P_2 + 5P_5 = \mathrm{diag}(2, 2, 5) = D.$$

Due autospazi distinti



E_2: piano, dimensione 2
E_5: retta, dimensione 1

Gli indici di P indicano gli autovalori distinti; P_2 conserva tutte le componenti del piano.

Proiettori spettrali

Per un autovettore normalizzato u_k,

$$P_k = u_k u_k^\dagger, \qquad P_k v = u_k \langle u_k, v \rangle.$$

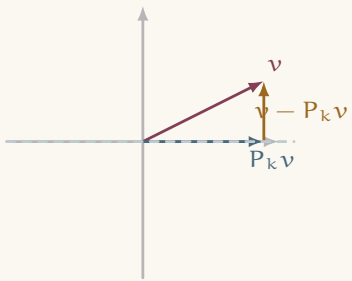
Per un autospazio degenere si sommano i proiettori di una sua base ortonormale.

$$P_j P_k = \delta_{jk} P_k, \qquad \sum_k P_k = I.$$

Indicizzando gli autovalori distinti,

$$H = \sum_k \lambda_k P_k.$$

La componente nell'autospazio



La componente e il residuo sono ortogonali.

Il proiettore conserva la componente nell'autospazio e annulla le componenti ortogonali.

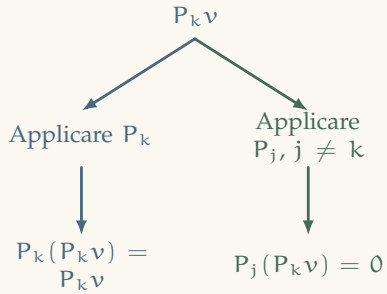
Perché i proiettori si separano

Con autovettori ortonormali:

$$P_j P_k = u_j u_j^\dagger u_k u_k^\dagger$$
$$= u_j \langle u_j, u_k \rangle u_k^\dagger.$$

Se $j \neq k$, il prodotto interno è zero. Se $j = k$, vale uno e rimane P_k. Dunque $P_j P_k = \delta_{jk} P_k$.

Poiché $v = \sum_k \langle u_k, v \rangle u_k$, si ha $\sum_k P_k v = v$ per ogni v: la somma dei proiettori è I.



Autospazi distinti di una matrice hermitiana.

Esempio: costruire il primo proiettore

Per $u_1 = (1+i, 1)^T/\sqrt{3}$:

$$P_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-i & 1 \end{pmatrix}.$$

Ogni elemento è un prodotto:

$$P_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (1+i)(1-i) & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}.$$

$P_1 = \frac{1}{3}(\cdots)$

	0	1
0	2	$1+i$
1	$1-i$	1

Ogni cella nasce da una componente e un coniugato.

Il prodotto esterno costruisce l'operatore prima di applicarlo a un vettore.

Costruire il secondo proiettore

La riga aggiunta di $u_2 = (-1-i, 2)^T/\sqrt{6}$ è $(-1+i, 2)/\sqrt{6}$. Pertanto

$$P_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} (-1-i)(-1+i) & (-1-i)2 \\ 2(-1+i) & 2\cdot 2 \end{pmatrix}.$$

Il primo elemento vale $1 - i + i - i^2 = 2$; gli altri sono $-2-2i$, $-2+2i$ e 4.

Si ottiene la matrice che useremo nella somma $P_1 + P_2$.

$P_2 = \frac{1}{6}(\cdots)$

	0	1
0	2	$-2-2i$
1	$-2+2i$	4

Esempio: secondo proiettore e completezza

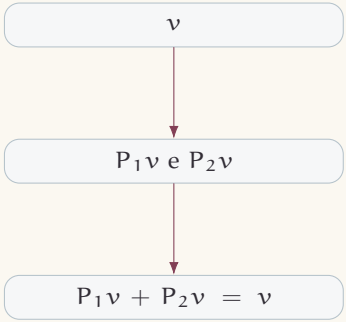
Con $u_2 = (-1-i, 2)^T/\sqrt{6}$,

$$P_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2-2i \\ -2+2i & 4 \end{pmatrix}.$$

Portiamo anche P_1 al denominatore 6: Gli elementi fuori diagonale si annullano:
$(2+2i)+(-2-2i)=0$ e il suo coniugato vale zero.

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4+2 & 0 \\ 0 & 2+4 \end{pmatrix} = I.$$

La somma ricostruisce ogni vettore.



Il segno globale scelto per un autovettore non cambia il suo proiettore.

Le due componenti e i loro pesi

Moltiplicare per $e_1 = (1,0)^T$ seleziona la prima colonna:

$$P_1 e_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\cdot 1 + (1+i)0 \\ (1-i)1 + 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix},$$

$$P_2 e_1 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2\cdot 1 + (-2-2i)0 \\ (-2+2i)1 + 4\cdot 0 \end{pmatrix}.$$

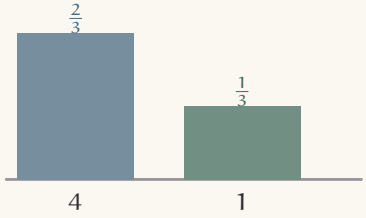
$$P_2 e_1 = (1,-1+i)^T/3.$$

La somma è $(2+1, 1-i-1+i)^T/3 = (1,0)^T$.

$$\|P_1 e_1\|^2 = \frac{4+1+1}{9} = \frac{2}{3},$$

$$\|P_2 e_1\|^2 = \frac{1+1+1}{9} = \frac{1}{3}.$$

Pesi calcolati per e_1



La somma è uno.

Esempio: separare e ricomporre un vettore

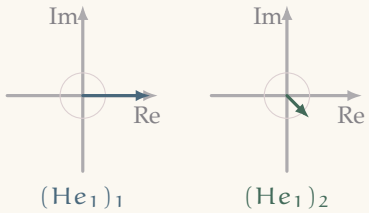
Per $e_1 = (1,0)^T$:

$$P_1 e_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}, \quad P_2 e_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix}.$$

Le componenti sommano a $(1,0)^T$. Applicando gli autovalori:

$$\begin{aligned} He_1 &= 4P_1 e_1 + P_2 e_1 \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8+1 \\ 4-4i-1+i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1-i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$He_1 = (3, 1-i)^T$



Un piano complesso per componente
Cerchi: modulo uno; stessa scala

Il risultato coincide con la prima colonna di H; la figura ne mostra le componenti.

Traccia, determinante e molteplicità

La traccia è la somma degli elementi diagonali:

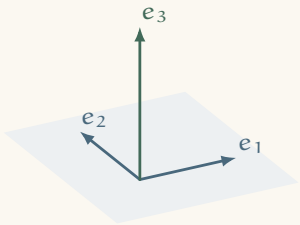
$$\operatorname{Tr} A = \sum_j A_{jj}.$$

Traccia e determinante sono invarianti per cambio di base. Nella base propria:

$$\operatorname{Tr} H = \sum_k \lambda_k \dim E_k, \qquad \det H = \prod_k \lambda_k^{\dim E_k}.$$

Per lo spettro $4, 1$: $\operatorname{Tr} H = 4 + 1 = 5$ e $\det H = 4 \cdot 1 = 4$. Per $\operatorname{diag}(2, 2, 5)$: $\operatorname{Tr} D = 2 + 2 + 5 = 9$.

Due autospazi distinti



E_2: piano, dimensione 2
E_5: retta, dimensione 1

La molteplicità è una dimensione dell'autospazio; i pesi delle proiezioni dipendono anche dal vettore scelto.

Perché la traccia non cambia base

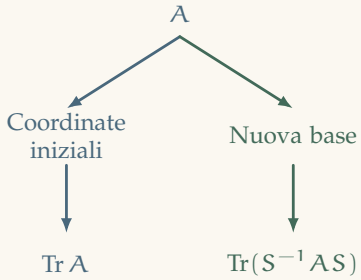
Per matrici quadrate della stessa dimensione:

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(AB) &= \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i \sum_j A_{ij} B_{ji} \\ &= \sum_j \sum_i B_{ji} A_{ij} = \operatorname{Tr}(BA).\end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\operatorname{Tr}(S^{-1}AS) = \operatorname{Tr}(SS^{-1}A) = \operatorname{Tr} A.$$

Per il determinante, la regola del prodotto dà $\det(S^{-1}AS) = (\det S)^{-1} \det A \det S = \det A$.



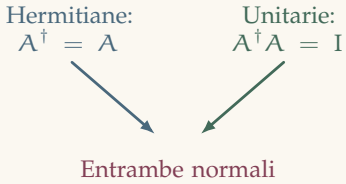
La quantità è la stessa.

Classi di operatori dopo il teorema spettrale

Una matrice è normale se $A^\dagger A = AA^\dagger$. Le matrici normali ammettono una base ortonormale di autovettori; la dimostrazione segue questa classificazione.

Le hermitiane sono normali perché $A^\dagger = A$; le unitarie perché entrambi i prodotti valgono I; i proiettori ortogonali perché entrambi valgono P.

L'identità appartiene alle tre classi. Un proiettore ortogonale è hermitiano; è anche unitario soltanto quando coincide con I.



Le condizioni hanno intersezioni, senza formare una successione.

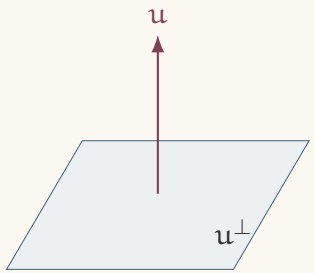
Una matrice normale e la sua aggiunta

Sia $N^\dagger N = NN^\dagger$. Per un suo autovettore $Nu = \lambda u$ poniamo $M = N - \lambda I$. Espandendo entrambi i prodotti,

$$M^\dagger M = N^\dagger N - \lambda N^\dagger - \lambda^* N + |\lambda|^2 I,$$

$$MM^\dagger = NN^\dagger - \lambda^* N - \lambda N^\dagger + |\lambda|^2 I.$$

La normalità di N rende uguali i due risultati, quindi anche M è normale.



N e $N^\dagger$ conservano la retta e il complemento.

L'esistenza di un autovalore complesso usa il teorema fondamentale dell'algebra, come nel caso hermitiano.

L'autovettore è comune anche all'aggiunta

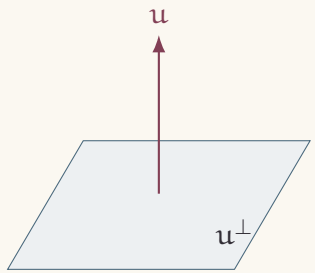
Per ogni vettore v, la normalità di M dà

$$\begin{aligned}\|Mv\|^2 &= v^\dagger M^\dagger M v \\ &= v^\dagger M M^\dagger v = \|M^\dagger v\|^2.\end{aligned}$$

Poiché $Mu = (N - \lambda I)u = 0$, anche $M^\dagger u = 0$.
Dunque

$$(N^\dagger - \lambda^* I)u = 0 \quad \Rightarrow \quad N^\dagger u = \lambda^* u.$$

Normalizziamo u senza alterare queste uguaglianze.



N e $N^\dagger$ conservano
la retta e il complemento.

La stessa direzione è propria per N e per la sua aggiunta; i due autovalori sono coniugati.

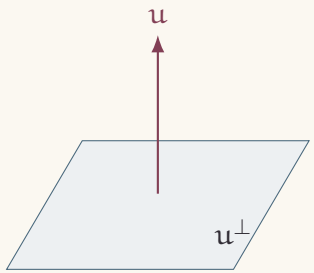
Ridurre il problema al complemento ortogonale

Se $u^\dagger w = 0$, allora

$$u^\dagger N w = (N^\dagger u)^\dagger w = (\lambda^* u)^\dagger w = \lambda u^\dagger w = 0,$$

$$u^\dagger N^\dagger w = (N u)^\dagger w = \lambda^* u^\dagger w = 0.$$

Il complemento $u^\perp$ è invariante per entrambi gli operatori. La restrizione di N è ancora normale: i prodotti con l'aggiunta sono le restrizioni di $N^\dagger N$ e $NN^\dagger$. Si ripete il procedimento nello spazio di dimensione inferiore.



N e $N^\dagger$ conservano la retta e il complemento.

A ogni passo si separa una direzione propria ortogonale alle precedenti; in dimensione uno il risultato è immediato.

La diagonalizzazione unitaria caratterizza la normalità

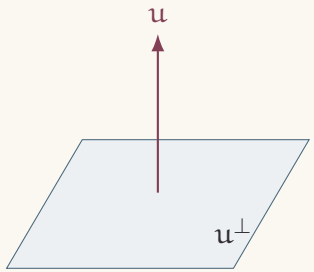
L'induzione costruisce una base ortonormale di autovettori, riunita nelle colonne di U. Quindi

$$N = UDU^\dagger, \qquad U^\dagger U = I.$$

Viceversa, se D è diagonale,

$$N^\dagger N = UD^\dagger DU^\dagger, \qquad NN^\dagger = UDD^\dagger U^\dagger.$$

Le diagonali di $D^\dagger D$ e $DD^\dagger$ sono entrambe $|\lambda_j|^2$, e le altre entrate sono nulle. I due prodotti coincidono.



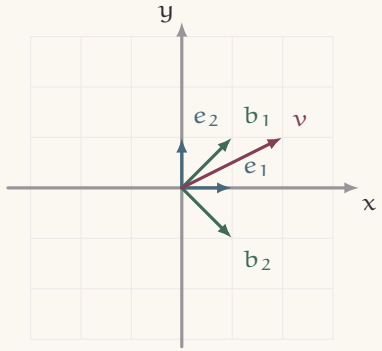
N e $N^\dagger$ conservano la retta e il complemento.

Una matrice complessa finita è diagonalizzabile mediante una base ortonormale se e solo se è normale.

Capitolo 8

Cambio di base e commutatori

Cambiare coordinate e trasformare un vettore sono operazioni diverse. L'ordine delle trasformazioni ha invece conseguenze sul risultato.



Stesso vettore, assi diversi

La matrice che cambia le coordinate

Le colonne di S sono i nuovi vettori di base scritti nella vecchia base E.

$$[v]_E = S[v]_B, \qquad [v]_B = S^{-1}[v]_E.$$

Per una trasformazione:

$$[A]_B = S^{-1}[A]_E S.$$

Se entrambe le basi sono ortonormali, $S^{-1} = S^\dagger$.

Il percorso delle coordinate



Il vettore e la trasformazione rimangono gli stessi; cambiano le loro coordinate.

Seguire il vettore attraverso le coordinate

La colonna $[v]_B$ contiene i coefficienti nella nuova base. Il percorso completo è

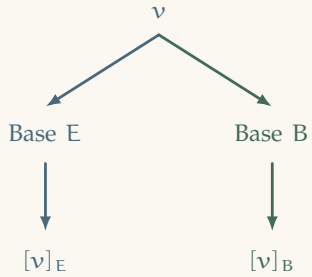
$$[v]_B \xrightarrow{S} [v]_E \xrightarrow{[A]_E} [Av]_E \xrightarrow{S^{-1}} [Av]_B.$$

Pertanto

$$[Av]_B = S^{-1}[A]_E S[v]_B.$$

La matrice che agisce direttamente sulle coordinate nuove è quindi $[A]_B = S^{-1}[A]_E S$.

Il vettore fisico viene trasformato da A; le matrici S e S^{-1} traducono le sue descrizioni.



Due descrizioni dello stesso vettore.

Esempio: coordinate su assi a 45°

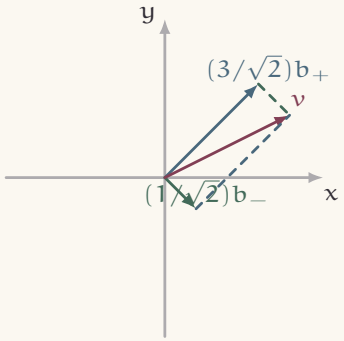
Usiamo $b_+ = (1,1)^T/\sqrt{2}$, $b_- = (1,-1)^T/\sqrt{2}$:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = S.$$

Per $v = (2,1)^T$:

$$[v]_B = S^\dagger v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2+1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La ricostruzione è $v = (3/\sqrt{2})b_+ + (1/\sqrt{2})b_-$.



Le componenti ricostruiscono lo stesso v.

Qui 45° è l'angolo degli assi nel piano dei vettori reali.

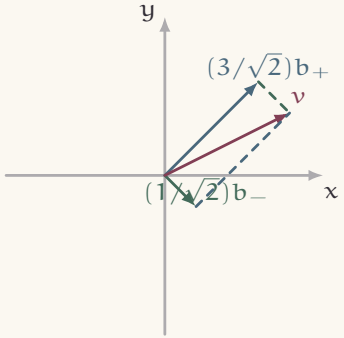
Verificare inversa e ricostruzione

La matrice S è reale e simmetrica. Inoltre

$$S^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 1 + 1(-1) \\ 1\cdot 1 + (-1)1 & 1\cdot 1 + (-1)(-1) \end{pmatrix} = I.$$

Quindi $S^{-1} = S^\dagger = S$. Ricostruiamo il vettore:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}b_+ + \frac{1}{\sqrt{2}}b_- = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$



Le componenti ricostruiscono lo stesso v.

Coordinate rispetto a una base obliqua

Siano $b_1 = (1,0)^T$, $b_2 = (1,1)^T$ e $v = (2,1)^T$. Le colonne della matrice

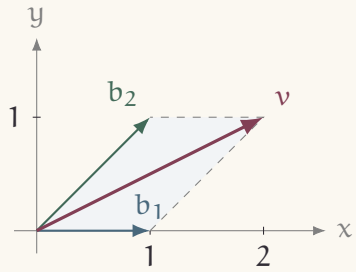
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono i vettori di base. Per $c = (c_1, c_2)^T$, l'equazione $v = Sc$ diventa

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

La seconda riga dà $c_2 = 1$; la prima dà $c_1 = 2 - 1 = 1$. Ricostruiamo:

$$v = 1b_1 + 1b_2 = (1,0)^T + (1,1)^T.$$



Base canonica E.
$v = b_1 + b_2$.

La base è indipendente: $\det S = 1$. Gli assi sono obliqui, poiché $b_1^\dagger b_2 = 1$.

L'inversa ricava i coefficienti nella base

Con $\det S = 1$, la formula dell'inversa dà

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

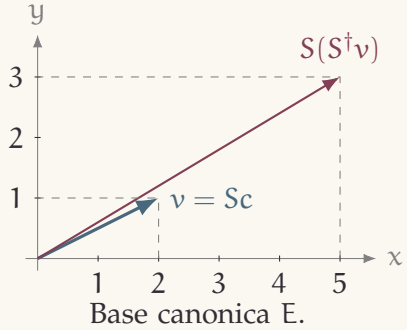
$$S^{-1}v = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 - 1\cdot 1 \\ 0\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I prodotti interni con i vettori di base sono

$$S^{\dagger}v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Usandoli come coefficienti, ricostruiremmo

$$2b_1 + 3b_2 = (2,0)^{\mathsf{T}} + (3,3)^{\mathsf{T}} = (5,3)^{\mathsf{T}}.$$



Base canonica E.

In una base ortonormale, i prodotti interni coincidono con i coefficienti di espansione.

La norma nelle coordinate oblique

Da $v = Sc$ segue

$$\|v\|^2 = (Sc)^\dagger Sc = c^\dagger G c, \quad G = S^\dagger S.$$

La matrice di Gram è

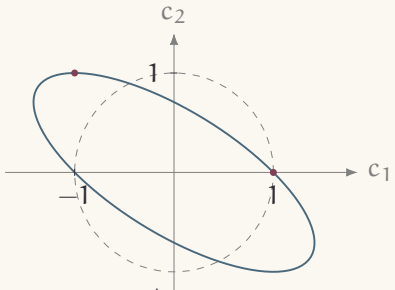
$$G = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per $c = (1,1)^T$:

$$Gc = (1+1, 1+2)^T = (2,3)^T,$$

$$c^\dagger G c = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 = 5,$$

$$\|v\|^2 = |2|^2 + |1|^2 = 5.$$



Blu: $c^\dagger G c = 1$
nelle coordinate reali.
Tratteggio: $c_1^2 + c_2^2 = 1$.

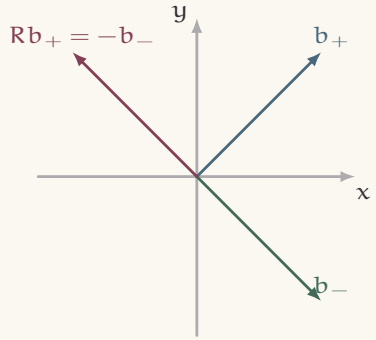
La somma $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 2$ trascura l'angolo fra gli assi. Per una base ortonormale si avrebbe $G = I$.

I prodotti del cambio di base

Torniamo alla base ortonormale a 45°. Posto $R = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $B = RS$, separiamo il fattore $1/\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2}B_{11} = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = -1,$$
$$\sqrt{2}B_{12} = 0 \cdot 1 - 1(-1) = 1,$$
$$\sqrt{2}B_{21} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1,$$
$$\sqrt{2}B_{22} = 1 \cdot 1 + 0(-1) = 1.$$

Quindi $RS = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Calcoliamo poi $S^\dagger RS$ nella pagina seguente.



Gli assi restano riferimenti della stessa rotazione.

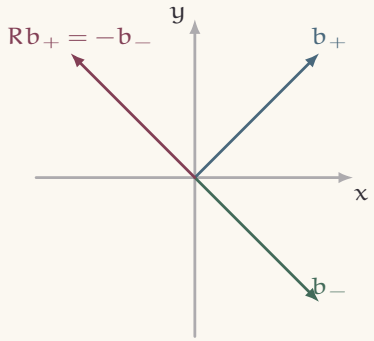
Completare il prodotto $S^\dagger RS$

I due fattori portano ciascuno $1/\sqrt{2}$, quindi il prodotto ha fattore $1/2$. I numeratori delle quattro entrate sono

$$\begin{aligned} 1(-1) + 1 \cdot 1 &= 0, \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 &= 2, \\ 1(-1) + (-1)1 &= -2, \\ 1 \cdot 1 + (-1)1 &= 0. \end{aligned}$$

Pertanto

$$S^\dagger RS = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$



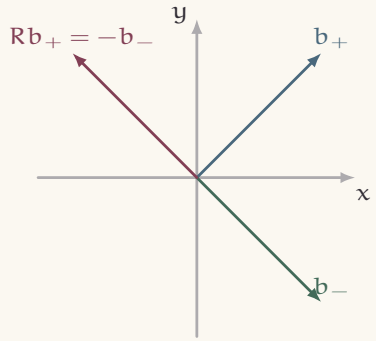
Gli assi restano riferimenti della stessa rotazione.

Esempio: la stessa rotazione in due basi

Per $R = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$:

$$RS = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} S^\dagger RS &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Gli assi restano riferimenti della stessa rotazione.

Le matrici differiscono perché la seconda base ha orientazione opposta; la trasformazione geometrica è una sola.

Commutatore: confrontare i due ordini

Definiamo

$$[A, B] = AB - BA.$$

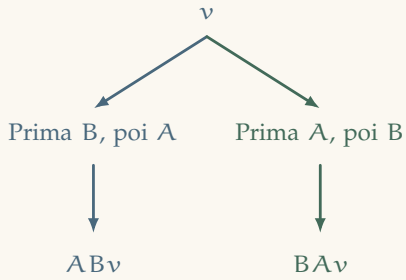
Se il commutatore è nullo, i due ordini coincidono su ogni vettore.

$$[A, B] = -[B, A],$$

$$[A, B + C] = [A, B] + [A, C],$$

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C].$$

Per hermitiane, commutare equivale ad ammettere una base comune di autovettori.



Il commutatore è la differenza fra le uscite.

Le due implicazioni vengono dimostrate nelle pagine seguenti.

Sviluppare le regole del commutatore

Dalla definizione segue

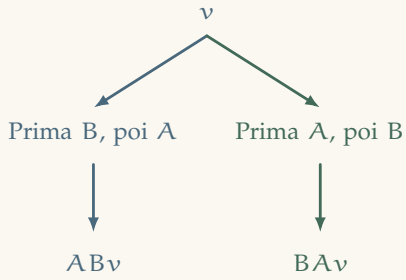
$$[A, B] = AB - BA = -(BA - AB) = -[B, A].$$

Distribuendo i prodotti:

$$[A, B + C] = AB + AC - BA - CA = [A, B] + [A, C].$$

Per il prodotto inseriamo due termini opposti:

$$\begin{aligned}[A, BC] &= ABC - BCA \\ &= ABC - BAC + BAC - BCA \\ &= (AB - BA)C + B(AC - CA).\end{aligned}$$



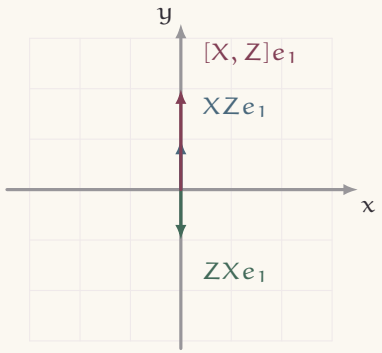
Il commutatore è la differenza fra le uscite.

Calcolare XZ e ZX prima di sottrarli

I due prodotti sono

$$XZ = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 0 + 1(-1) \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0(-1) \end{pmatrix},$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$ZX = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + (-1)1 & 0\cdot 1 + (-1)0 \end{pmatrix},$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Su e_1, il primo restituisce $(0,1)^T$ e il secondo $(0,-1)^T$.



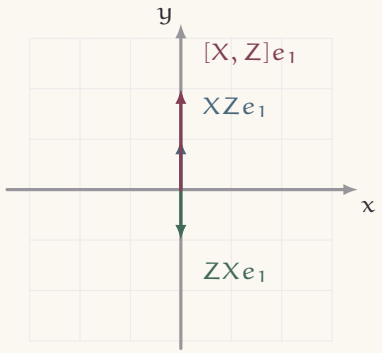
Esempio: commutatore di X e Z

Poniamo $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $Z = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

$$XZ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad ZX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sottraendo elemento per elemento:

$$[X, Z] = \begin{pmatrix} 0-0 & -1-1 \\ 1-(-1) & 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$



I due ordini mandano e_1 in vettori opposti; il significato fisico del segno globale viene precisato nella pagina seguente.

Il segno globale nell'esempio con X e Z

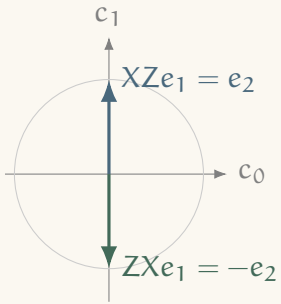
Poiché $XZ = -ZX$, per qualsiasi stato ψ si ha

$$XZ\psi = -(ZX\psi) = e^{i\pi} ZX\psi.$$

Su $e_1 = (1,0)^T$ i risultati sono e_2 e $-e_2$. Per una lettura lungo un vettore normalizzato u, poniamo $a = u^\dagger ZX\psi$:

$$|u^\dagger XZ\psi|^2 = |-a|^2 = (-a)^*(-a)$$
$$= (-a^*)(-a) = a^* a = |a|^2.$$

Le due sequenze applicate all'intero stato hanno le stesse previsioni di misura.



Ampiezze reali.
e_2 e $-e_2$: stesso stato.

La distinguibilità delle uscite richiede anche il controllo della fase globale.

Due ordini che preparano stati ortogonali

Confrontiamo ora RZ e ZR, dove

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

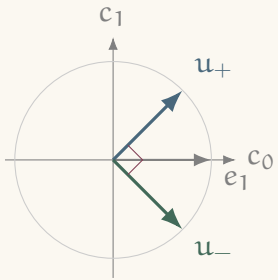
Per l'ingresso $e_1 = (1,0)^T$:

$$Ze_1 = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 1 - 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$RZe_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\cdot 1 - 1\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u_+.$$

Nell'altro ordine, $Re_1 = u_+$ e

$$ZRe_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 1 - 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = u_-.$$



R: rotazione di 45°.
Z: riflessione nell'asse c_0.

Le uscite hanno norma uno: $(1^2 + 1^2)/2 = 1$. Scegliamo ora una lettura diagonale.

Una lettura che distingue i due ordini

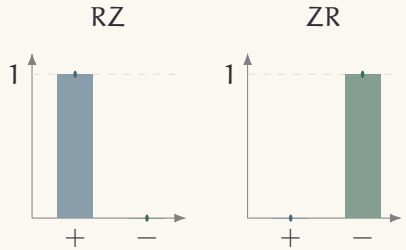
Nella base $u_\pm = (1, \pm 1)^{\mathsf{T}}/\sqrt{2}$, le proiezioni dell'uscita $RZe_1 = u_+$ sono

$$\begin{pmatrix} u_+^\dagger u_+ \\ u_-^\dagger u_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 1 - 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $P(+) = |1|^2 = 1$ e $P(-) = |0|^2 = 0$. Per l'uscita $ZRe_1 = u_-$ si ha

$$\begin{pmatrix} u_+^\dagger u_- \\ u_-^\dagger u_- \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1(-1) \\ 1\cdot 1 + (-1)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ora $P(+) = |0|^2 = 0$ e $P(-) = |1|^2 = 1$. In entrambi i casi la somma è 1.



Probabilità nella medesima base $+/-$. Per ciascun ordine si prepara nuovamente e_1.

La lettura diagonale distingue i due ordini. Nella base e_1, e_2 entrambe le uscite darebbero $(1/2, 1/2)$.

Esempio: una forma quadratica hermitiana

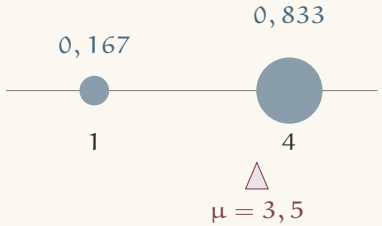
Per $H = \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$ e $v = (1,1)^T/\sqrt{2}$:

$$Hv = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + (1+i)1 \\ (1-i)1 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4+i \\ 3-i \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} v^\dagger Hv &= \frac{1}{2}[(4+i)+(3-i)] \\ &= \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Le parti immaginarie si cancellano. Il risultato è compreso fra gli autovalori 1 e 4.

La media come baricentro



Pesi sopra i punti; aree proporzionali

Per un vettore normalizzato, la forma quadratica è una media pesata degli autovalori.

Ricavare i pesi del baricentro

Per $v = (1,1)^{\mathsf{T}}/\sqrt{2}$ le coordinate proprie sono

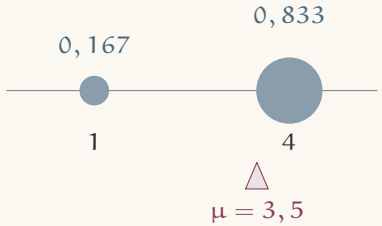
$$u_1^\dagger v = \frac{(1-i)1 + 1\cdot 1}{\sqrt{6}} = \frac{2-i}{\sqrt{6}},$$

$$u_2^\dagger v = \frac{(-1+i)1 + 2\cdot 1}{\sqrt{12}} = \frac{1+i}{\sqrt{12}}.$$

I moduli quadri valgono $w_1 = (4+1)/6 = 5/6$ e $w_2 = (1+1)/12 = 1/6$. Dunque

$$4w_1 + 1w_2 = \frac{20+1}{6} = \frac{7}{2}.$$

La media come baricentro



Pesi sopra i punti; aree proporzionali

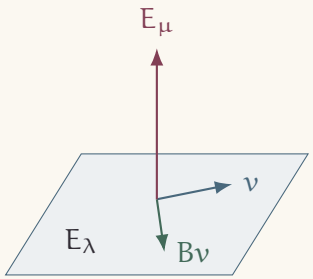
Il baricentro usa pesi calcolati dalle proiezioni; la loro somma è 5/6 + 1/6 = 1.

La commutazione conserva gli autospazi

Siano A e B hermitiane, con $AB = BA$. Se $Av = \lambda v$, allora

$$A(Bv) = B(Av) = B(\lambda v) = \lambda Bv.$$

Quindi B manda l'autospazio E_λ di A in se stesso. La restrizione $B|_{E_\lambda}$ è hermitiana; il teorema spettrale fornisce una base ortonormale di E_λ fatta di suoi autovettori. Questi vettori sono simultaneamente autovettori di A e B. Riunendo le basi di tutti gli autospazi si ottiene la base comune.



$B(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$
Ogni autospazio resta invariante.

Gli autospazi di A relativi ad autovalori distinti sono ortogonali; la loro somma copre l'intero spazio.

Una base propria comune implica commutazione

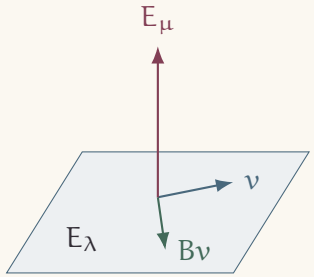
Se una stessa unitaria U diagonalizza A e B, scriviamo

$$A = U D_A U^\dagger, \qquad B = U D_B U^\dagger.$$

Il prodotto diventa

$$\begin{aligned} AB &= U D_A U^\dagger U D_B U^\dagger \\ &= U D_A D_B U^\dagger \\ &= U D_B D_A U^\dagger = BA. \end{aligned}$$

Le matrici diagonali commutano perché, in ogni posizione diagonale, $a_j b_j = b_j a_j$; fuori diagonale entrambi i prodotti sono nulli.



$B(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$
Ogni autospazio resta invariante.

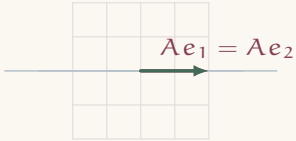
Per due hermitiane, commutazione ed esistenza di una base propria ortonormale comune sono equivalenti.

Capitolo 9

Nucleo, immagine e rango

Una trasformazione può cancellare alcune direzioni. Nucleo e immagine descrivono ciò che si perde e ciò che rimane.

$$A(x, y) = (x + y, 0)$$



Grigio: prima Blu: dopo

Le direzioni annullate e quelle raggiunte

Per $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$,

$$\ker A = \{v : Av = 0\},$$

$$\operatorname{Im} A = \{Av : v \in \mathbb{C}^n\}.$$

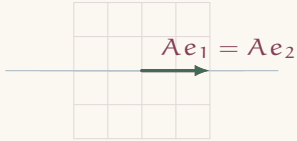
Il rango è $\dim \operatorname{Im} A$.

Il teorema del rango afferma

$$\dim \ker A + \operatorname{rank} A = n.$$

La dimensione di partenza si divide fra nucleo e direzioni indipendenti trasmesse.

$A(x, y) = (x + y, 0)$



Grigio: prima Blu: dopo

Dimostriamo il teorema completando una base del nucleo; seguiranno due esempi svolti.

Completare una base del nucleo

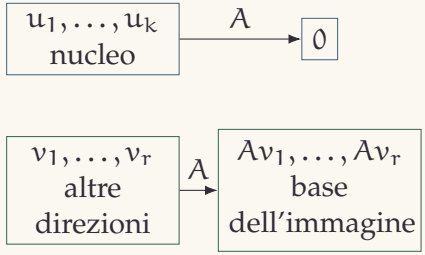
Sia $u_1, \dots, u_k$ una base di $\ker A$. Aggiungiamo un vettore esterno allo spazio già generato: ogni aggiunta conserva l'indipendenza.

Dopo $r = n - k$ aggiunte otteniamo una base $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r$ di $\mathbb{C}^n$. Ogni x si scrive

$$x = \sum_{j=1}^{k} a_j u_j + \sum_{\ell=1}^{r} b_\ell v_\ell.$$

Per linearità e perché $Au_j = 0$,

$$Ax = \sum_{j} a_j 0 + \sum_{\ell} b_\ell A v_\ell = \sum_{\ell} b_\ell A v_\ell.$$



Le immagini $Av_1, \dots, Av_r$ generano l'intero spazio delle uscite.

Contare le direzioni indipendenti in uscita

Supponiamo $\sum_{\ell=1}^{r} c_\ell A v_\ell = 0$. Allora

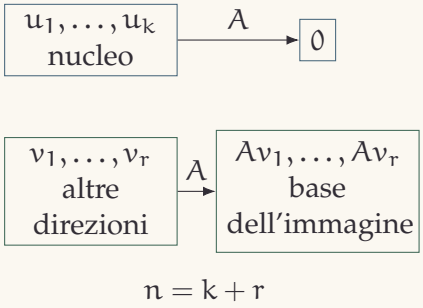
$$A\Big(\sum_\ell c_\ell v_\ell\Big) = 0, \qquad \sum_\ell c_\ell v_\ell \in \ker A.$$

Esistono quindi $d_1, \dots, d_k$ tali che

$$\sum_\ell c_\ell v_\ell = \sum_j d_j u_j, \qquad \sum_\ell c_\ell v_\ell - \sum_j d_j u_j = 0.$$

L'indipendenza della base completa impone $c_\ell = 0$ e $d_j = 0$. Gli Av_ℓ sono una base dell'immagine:

$$\operatorname{rank} A = r = n - k, \qquad \dim \ker A + \operatorname{rank} A = n.$$



La stessa dimostrazione vale su campo reale e complesso; i casi di nucleo nullo o immagine nulla ammettono una base vuota.

Esempio geometrico: una direzione cancellata

Per $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$,

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x + 1y \\ 0x + 0y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

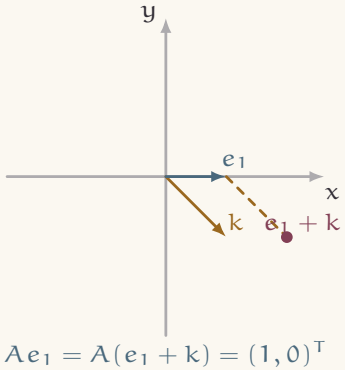
La condizione $x + y = 0$ dà $x = -y$. Ponendo $x = t$, otteniamo $(x, y) = t(1, -1)$.

Ogni uscita appartiene all'asse orizzontale; ogni $(s, 0)$ è raggiunta scegliendo $(x, y) = (s, 0)$.

$$\ker A = \operatorname{span}\{(1, -1)^T\},$$

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{span}\{(1, 0)^T\}.$$

Le due dimensioni sono $1 + 1 = 2$.



La direzione k viene annullata: aggiungerla a un ingresso lascia invariata l'uscita.

Esempio 3×3: risolvere $Av = 0$

Consideriamo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La seconda equazione è doppia della prima.
Restano

$$x + 2y + 3z = 0, \qquad x + y + z = 0.$$

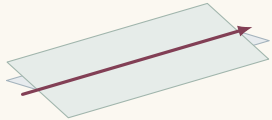
Sottraendo: $y + 2z = 0$, quindi $y = -2z$.

Sostituendo nella seconda:

$$x - 2z + z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = z.$$

Sezione reale del nucleo

$x + 2y + 3z = 0$



$x + y + z = 0$

$\ker A \cap \mathbb{R}^3 = \{t(1, -2, 1) : t \in \mathbb{R}\}$

La presenza di un parametro libero corrisponde a una direzione nel nucleo.

Esempio 3×3: nucleo, rango e controllo

Abbiamo $v = z(1,-2,1)^T$, con $z \in \mathbb{C}$, dunque

$$\ker A = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{(1,-2,1)^T\}.$$

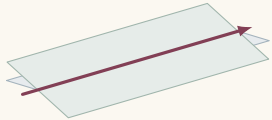
$$\operatorname{rank} A = 3 - \dim \ker A = 3 - 1 = 2.$$

Il controllo diretto dà

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4+3 \\ 2-8+6 \\ 1-2+1 \end{pmatrix} = 0.$$

Sezione reale del nucleo

$x + 2y + 3z = 0$



$x + y + z = 0$

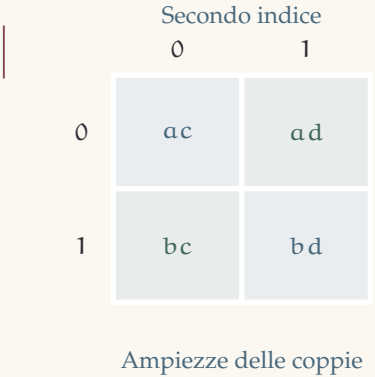
$\ker A \cap \mathbb{R}^3 = \{t(1,-2,1) : t \in \mathbb{R}\}$

Il nucleo ha una base con un vettore: il teorema del rango dà quindi $3 - 1 = 2$, senza ulteriori criteri.

Capitolo 10

Prodotto tensoriale

Per descrivere due sistemi occorre assegnare un'ampiezza a ogni coppia di alternative.



La base delle coppie

Se il primo spazio ha base $(e_1, \ldots, e_m)$ e il secondo $(f_1, \ldots, f_n)$, la base composta è

$$\{e_j \otimes f_k : 1 \le j \le m,\ 1 \le k \le n\}.$$

Ci sono mn coppie:

$$\dim(H_A \otimes H_B) = mn.$$

Due spazi a due dimensioni danno quattro coordinate. Per N fattori binari sono 2^N.

Secondo indice

Primo indice	0	1
0	$e_0 \otimes f_0$	$e_0 \otimes f_1$
1	$e_1 \otimes f_0$	$e_1 \otimes f_1$

Vettori della base composta

La tabella elenca quattro vettori di base, usando gli indici $0, 1$ per ciascun sistema.

Costruire le coordinate delle coppie

Scriviamo $u = u_0 e_0 + u_1 e_1$ e $v = v_0 f_0 + v_1 f_1$. Il prodotto tensoriale distribuisce somme e scalari in ciascun fattore:

$$\begin{aligned} u \otimes v = {} & u_0 v_0 \, e_0 \otimes f_0 \\ & + u_0 v_1 \, e_0 \otimes f_1 \\ & + u_1 v_0 \, e_1 \otimes f_0 \\ & + u_1 v_1 \, e_1 \otimes f_1 . \end{aligned}$$

Si ottengono quattro coefficienti, uno per ciascuna coppia di indici, nell'ordine $(00, 01, 10, 11)$.

Una coordinata per ogni coppia

	0	1
0	$u_0 v_0$	$u_0 v_1$
1	$u_1 v_0$	$u_1 v_1$

La bilinearità è la regola con cui costruiamo il prodotto tensoriale dei vettori.

Esempio: espandere il prodotto di due vettori

Per $u = (1, 2)^T$ e $v = (3, -1)^T$:

$$u \otimes v = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

L'ordine è $(00, 01, 10, 11)$.

$$\|u \otimes v\|^2 = 9 + 1 + 36 + 4 = 50,$$
$$\|u\|^2 \|v\|^2 = (1 + 4)(9 + 1) = 50.$$

Ampiezze delle coppie

	Secondo indice 0	1
0	3	−1
1	6	−2

Il controllo della norma verifica i moduli, ma non rileva uno scambio nell'ordine delle componenti.

Quando quattro coefficienti si fattorizzano

Un vettore $(a, b, c, d)^T$ è un prodotto se

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 & v_1 \end{pmatrix}.$$

La matrice dei coefficienti ha rango al più uno:

$$ad - bc = 0.$$

Per un vettore non nullo questa condizione è anche sufficiente.

Secondo indice

	0	1
0	a	b
1	c	d

Ampiezze delle coppie

Per un prodotto, $ad - bc = (u_0v_0)(u_1v_1) - (u_0v_1)(u_1v_0) = 0$: gli stessi fattori compaiono nei due termini.

Ricavare i due fattori

Supponiamo $ad - bc = 0$ e $a \neq 0$. Poiché $d = bc/a$,

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ b/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a(b/a) \\ c \\ c(b/a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

I fattori sono quindi $(a, c)^T$ e $(1, b/a)^T$. Per $(a, b, c, d) = (1, 2, 3, 6)$ si ricavano

$$(a, c)^T = (1, 3)^T, \qquad (1, b/a)^T = (1, 2)^T.$$

La seconda colonna è il doppio della prima

	0	1
0	1	2
1	3	6

Una colonna determina la direzione; il rapporto fra le colonne determina l'altro fattore.

La fattorizzazione quando $a = 0$

Se $a = 0$, la condizione $ad - bc = 0$ diventa $bc = 0$.

Se $b \neq 0$, allora $c = 0$ e

$$(b, d)^T \otimes (0, 1)^T = (0, b, 0, d)^T.$$

Se anche $b = 0$, qualunque siano c, d:

$$\begin{aligned}(0, 1)^T \otimes (c, d)^T &= (0c, 0d, 1c, 1d)^T \\ &= (0, 0, c, d)^T.\end{aligned}$$

Questi casi completano la fattorizzazione di ogni vettore che soddisfa il criterio.

Un'intera riga può annullarsi

	0	1
0	0	0
1	c	d

I quattro prodotti del primo caso sono $b \cdot 0 = 0$, $b \cdot 1 = b$, $d \cdot 0 = 0$, $d \cdot 1 = d$. Il vettore nullo si ottiene scegliendo un fattore nullo.

Esempio: un prodotto e un non prodotto

Per $w = (1, 2, 3, 6)^T$:

$$ad - bc = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0,$$

$$w = (1, 3)^T \otimes (1, 2)^T.$$

Per $z = (1, 0, 0, 1)^T/\sqrt{2}$:

$$ad - bc = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Il secondo vettore non è un prodotto di due vettori.

Ampiezze delle coppie

Primo indice \ Secondo indice	0	1
0	$1/\sqrt{2}$	0
1	0	$1/\sqrt{2}$

Il controllo del prodotto dà $(1 \cdot 1,\ 1 \cdot 2,\ 3 \cdot 1,\ 3 \cdot 2) = (1, 2, 3, 6)$. Per z, invece, $a = d = 1/\sqrt{2}$, $b = c = 0$.

Prodotto di Kronecker e operazioni locali

Per matrici 2×2,

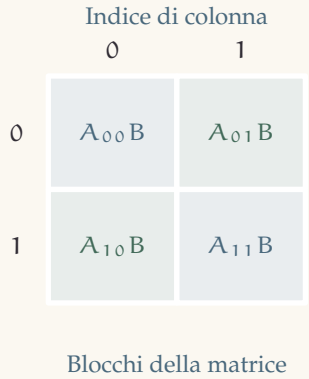
$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{00}B & A_{01}B \\ A_{10}B & A_{11}B \end{pmatrix}.$$

Vale

$$(A \otimes B)(u \otimes v) = (Au) \otimes (Bv).$$

In particolare $A \otimes I$ agisce sul primo fattore.

Il prodotto è bilineare e soddisfa
$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$.



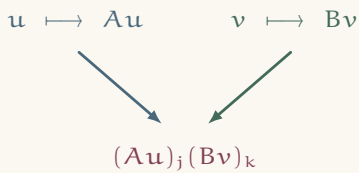
Ogni cella della figura è un blocco matriciale, non un singolo coefficiente.

Perché l'operazione agisce su ciascun fattore

Poniamo $w = (A \otimes B)(u \otimes v)$. La componente con indici (j, k) è

$$\begin{aligned} w_{jk} &= \sum_{\ell,m} A_{j\ell} B_{km} u_\ell v_m \\ &= \left(\sum_{\ell} A_{j\ell} u_\ell \right) \left(\sum_{m} B_{km} v_m \right) \\ &= (Au)_j (Bv)_k. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ricavato $(A \otimes B)(u \otimes v) = (Au) \otimes (Bv)$: ciascuna matrice agisce sul proprio fattore.



Ogni coefficiente combina le due azioni locali.

Le somme hanno indici indipendenti: per questo il doppio prodotto si separa.

Comporre due operazioni sui fattori

Applichiamo prima $C \otimes D$ a $u \otimes v$:

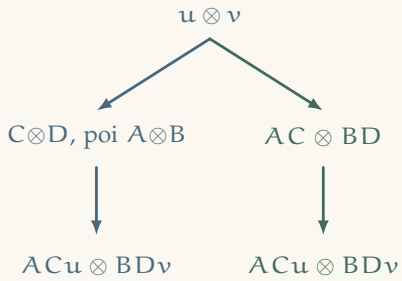
$$(C \otimes D)(u \otimes v) = Cu \otimes Dv.$$

L'operazione successiva dà

$$(A \otimes B)(Cu \otimes Dv) = ACu \otimes BDv.$$

Questo è anche il risultato di $(AC \otimes BD)(u \otimes v)$. Poiché l'uguaglianza vale su ogni vettore della base composta, le matrici coincidono:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD.$$



Lo stesso risultato su ogni vettore di base.

Esempio: scambiare soltanto il primo fattore

Con $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$,

$$X \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(X \otimes I)(a, b, c, d)^T = (c, d, a, b)^T.$$

Si scambiano le due righe della tabella delle ampiezze, lasciando invariato il secondo indice.

Secondo indice

	0	1
0	c	d
1	a	b

Ampiezze delle coppie

Le quattro righe danno $0a + 0b + 1c + 0d = c$, $0a + 0b + 0c + 1d = d$, $1a + 0b + 0c + 0d = a$ e $0a + 1b + 0c + 0d = b$.

Scambiare il secondo fattore

I blocchi di $I \otimes X$ sono $X, 0, 0, X$:

$$I \otimes X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ogni riga seleziona una coordinata:

$$\begin{aligned} 0a + 1b + 0c + 0d &= b, \\ 1a + 0b + 0c + 0d &= a, \\ 0a + 0b + 0c + 1d &= d, \\ 0a + 0b + 1c + 0d &= c. \end{aligned}$$

$I \otimes X$: scambio delle colonne

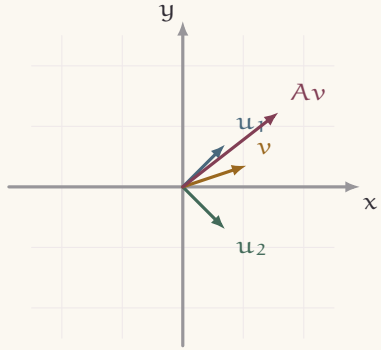
	0	1
0	b	a
1	d	c

Il primo indice resta invariato e si scambiano le colonne. Per $X \otimes I$ i blocchi sono $0, I, I, 0$ e si scambiano le righe.

Capitolo 11

Funzioni di matrici

Una base propria trasforma potenze ed esponenziali di matrici in calcoli sui singoli autovalori.



Esempio reale: direzioni proprie

Dalle potenze al calcolo funzionale

Per una matrice hermitiana $A = \sum_k \lambda_k P_k$,

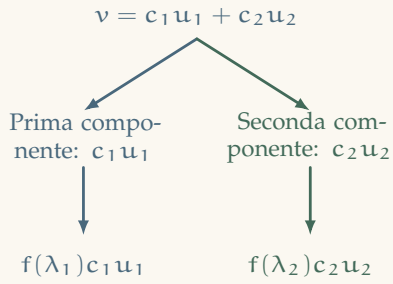
$$A^2 = \sum_{j,k} \lambda_j \lambda_k P_j P_k = \sum_k \lambda_k^2 P_k.$$

Ripetendo il ragionamento,

$$A^m = \sum_k \lambda_k^m P_k.$$

Per una funzione definita sullo spettro poniamo

$$f(A) = \sum_k f(\lambda_k) P_k.$$



$f(A)v$ è la somma delle due uscite.

Si applica la funzione agli autovalori, non ai singoli elementi della matrice.

Esempio: H^2 per prodotto diretto

Per $H = \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$, calcoliamo separatamente le quattro entrate:

$$\begin{aligned}
(H^2)_{11} &= 3 \cdot 3 + (1+i)(1-i) \\
&= 9 + 1 - i + i - i^2 = 11, \\
(H^2)_{12} &= 3(1+i) + (1+i)2 = 5 + 5i, \\
(H^2)_{21} &= (1-i)3 + 2(1-i) = 5 - 5i, \\
(H^2)_{22} &= (1-i)(1+i) + 2 \cdot 2 \\
&= 1 + i - i - i^2 + 4 = 6.
\end{aligned}$$

Quindi $H^2 = \begin{pmatrix} 11 & 5+5i \\ 5-5i & 6 \end{pmatrix}$.

I quattro prodotti riga per colonna

	1	2
1	11	$5+5i$
2	$5-5i$	6

Il prodotto diretto dà gli elementi di H^2. Ora li ricaviamo anche dai proiettori già calcolati.

Esempio: H^2 dalla decomposizione spettrale

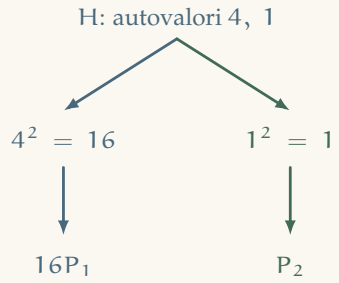
Poniamo $K = H^2 = 16P_1 + P_2$. Calcoliamo:

$$K_{11} = 16 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{6} = \frac{64+2}{6} = 11,$$

$$K_{22} = 16 \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{6} = \frac{32+4}{6} = 6,$$

$$K_{12} = 16\frac{1+i}{3} - \frac{2+2i}{6} = \frac{(32-2)(1+i)}{6} = 5+5i,$$

$$K_{21} = \frac{32(1-i) - 2(1-i)}{6} = 5-5i.$$



I quattro elementi coincidono con il prodotto diretto: i sottospazi propri sono gli stessi, mentre cambiano i fattori di dilatazione.

Le due direzioni proprie di X

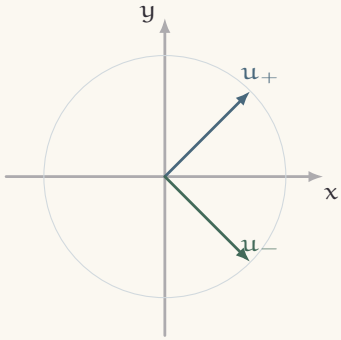
L'equazione $X(x,y)^T = (y,x)^T = \lambda(x,y)^T$ dà $y = \lambda x$, $x = \lambda y$. Per un vettore non nullo, $\lambda^2 = 1$, quindi $\lambda = \pm 1$.

$$u_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm 1)^T, \qquad \|u_\pm\|^2 = \frac{1+1}{2} = 1.$$

I prodotti colonna per riga sono

$$P_\pm = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\cdot 1 & 1(\pm 1) \\ (\pm 1)1 & (\pm 1)^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Confrontando le entrate, $P_\pm = (I \pm X)/2$.



Due direzioni ortogonali

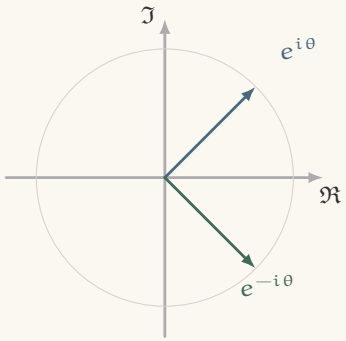
La normalizzazione fissa la lunghezza dei due autovettori; le rette proprie restano invariate.

Esempio: esponenziale di X

Per $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ gli autovalori sono ± 1.

$$P_+ = \frac{I + X}{2}, \qquad P_- = \frac{I - X}{2}.$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta X} &= e^{i\theta} P_+ + e^{-i\theta} P_- \\ &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} I \\ &\quad + \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} X. \end{aligned}$$



Le due direzioni proprie acquistano fasi opposte

Le due direzioni proprie acquistano fasi opposte.

Dalle fasi opposte a seno e coseno

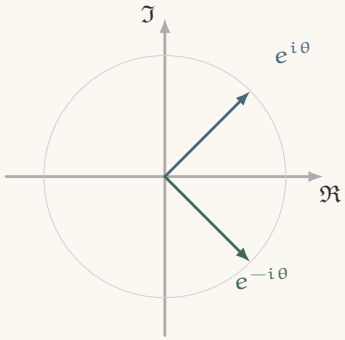
Con $c = \cos\theta$ e $s = \sin\theta$, la formula di Eulero dà $e^{i\theta} = c + is$ ed $e^{-i\theta} = c - is$. Pertanto

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{2c}{2} = c, \quad \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = \frac{2is}{2} = is.$$

Per $U = e^{i\theta}P_+ + e^{-i\theta}P_-$,

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= P_+ + P_- \\ &\quad + e^{-2i\theta}P_+P_- + e^{2i\theta}P_-P_+ \\ &= P_+ + P_- = I. \end{aligned}$$

I termini misti si annullano perché le direzioni sono ortogonali.



Fasi opposte, moduli invariati

A $\pi/4$ le due coordinate positive della circonferenza sono uguali: $2c^2 = 1$, quindi $c = s = 1/\sqrt{2}$.

Esempio: ricomporre seni e coseni

Dalle formule di Eulero:

$$e^{i\theta X} = \cos\theta\, I + i \sin\theta\, X.$$

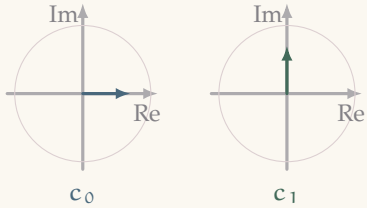
Quindi

$$e^{i\theta X} = \begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Per $\theta = \pi/4$, $\cos\theta = \sin\theta = 1/\sqrt{2}$: ritroviamo la matrice unitaria già verificata.

Per $\theta = \pi/2$ si ottiene iX.

$e^{i\pi X/4} e_0$



Un piano complesso per componente
Cerchi: modulo uno; stessa scala

L'esponenziale immaginario di una hermitiana è unitario perché i suoi autovalori hanno modulo uno.

Un generatore assegna una velocità alle fasi

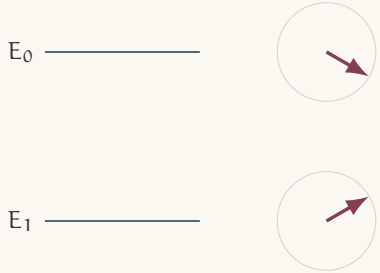
Una matrice hermitiana può rappresentare l'energia del sistema. Adottiamo la legge di evoluzione quantistica per un sistema isolato con energia indipendente dal tempo: ogni componente propria accumula una fase proporzionale alla sua energia e alla durata.

Se $G|u_j\rangle = E_j|u_j\rangle$,

$$U(t) = e^{-itG/\hbar} = \sum_j e^{-itE_j/\hbar} P_j.$$

Qui P_j è il proiettore già costruito e $\hbar$ è la costante di Planck ridotta.

$tE_j/\hbar$ è un angolo senza dimensioni.



La legge temporale è un postulato fisico; il calcolo dell'esponenziale usa la decomposizione spettrale sviluppata in questa sezione.

La coordinata di Bloch della lettura 0/1

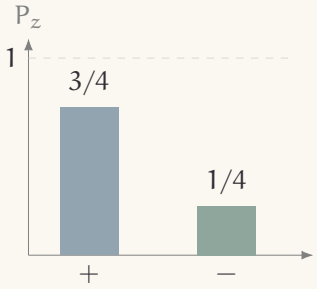
Riprendiamo dal modulo 1 la definizione $r_k = P_k(+) - P_k(-)$. Sia $\psi = (\alpha, \beta)^T$, con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. La lettura z usa $e_1 = (1,0)^T$, $e_2 = (0,1)^T$:

$$e_1^\dagger \psi = 1\alpha + 0\beta = \alpha, \quad e_2^\dagger \psi = 0\alpha + 1\beta = \beta.$$

Pertanto

$$P_z(+) = |\alpha|^2, \qquad P_z(-) = |\beta|^2,$$
$$r_z = |\alpha|^2 - |\beta|^2.$$

Nel diagramma, i moduli quadri valgono $(\sqrt{3}/2)^2 = 3/4$ e $(1/2)^2 = 1/4$.



Per $\psi = (\sqrt{3}/2, 1/2)^T$:
$r_z = 3/4 - 1/4 = 1/2$.

Le coordinate di Bloch rappresentano differenze di probabilità fra due esiti della stessa lettura.

Ricavare la coordinata della lettura diagonale

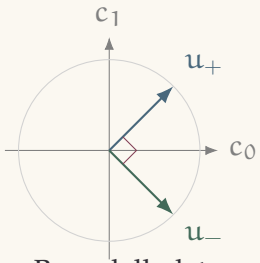
La lettura x usa $u_\pm = (1, \pm 1)^\mathsf{T}/\sqrt{2}$. Per $\psi = (\alpha, \beta)^\mathsf{T}$ normalizzato, poniamo $q = \alpha^* \beta$:

$$\begin{aligned} P_x(\pm) &= \left| \frac{\alpha \pm \beta}{\sqrt{2}} \right|^2 \\ &= \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 \pm q \pm q^*}{2} \\ &= \frac{1 \pm 2 \operatorname{Re} q}{2}. \end{aligned}$$

Posto $a = \operatorname{Re} q$, sottraiamo:

$$r_x = \frac{(1 + 2a) - (1 - 2a)}{2} = \frac{4a}{2} = 2a.$$

Quindi $r_x = 2 \operatorname{Re}(\alpha^* \beta)$.



Base della lettura x nel piano delle ampiezze reali.

La lettura diagonale rende accessibile la parte reale del prodotto fra le due ampiezze.

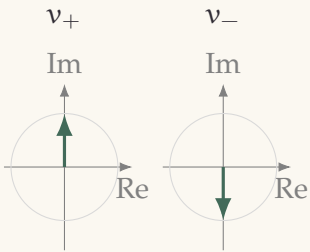
Le probabilità della lettura con fase immaginaria

La lettura y usa $v_\pm = (1, \pm i)^T/\sqrt{2}$. Le aggiunte sono $v_\pm^\dagger = (1, \mp i)/\sqrt{2}$; quindi

$$v_\pm^\dagger \psi = \frac{\alpha \mp i\beta}{\sqrt{2}}.$$

Con $q = \alpha^* \beta$, sviluppiamo i moduli quadri:

$$\begin{aligned} P_y(\pm) &= \frac{(\alpha^* \pm i\beta^*)(\alpha \mp i\beta)}{2} \\ &= \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 \mp iq \pm iq^*}{2} \\ &= \frac{1 \mp iq \pm iq^*}{2}. \end{aligned}$$



$\beta = i/\sqrt{2}$ $\beta = -i/\sqrt{2}$

Piani complessi di β; $\alpha = 1/\sqrt{2}$.

La base è ortonormale: $\|v_\pm\|^2 = (1+1)/2 = 1$ e $v_+^\dagger v_- = [1 + (-i)(-i)]/2 = 0$.

Completare la mappa delle tre letture

Scriviamo $q = a + ib$. La differenza fra il coniugato e il numero dà

$$i(q^* - q) = i[(a - ib) - (a + ib)] = i(-2ib) = 2b.$$

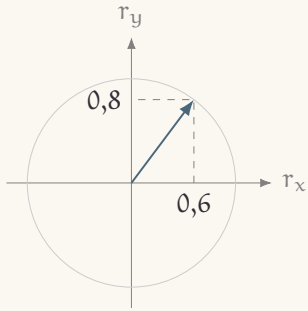
Perciò

$$P_y(\pm) = \frac{1 \pm 2b}{2}.$$

$$r_y = \frac{(1 + 2b) - (1 - 2b)}{2} = 2b.$$

Le tre coordinate sono

$$r_x = 2\,\mathrm{Re}(\alpha^*\beta),$$
$$r_y = 2\,\mathrm{Im}(\alpha^*\beta),$$
$$r_z = |\alpha|^2 - |\beta|^2.$$



Se $q = 0{,}3 + 0{,}4i$ e $r_z = 0$:
$r_x = 2 \cdot 0{,}3$, $r_y = 2 \cdot 0{,}4$.

Usiamo ora la mappa per calcolare la traiettoria prodotta da un generatore.

Due energie producono una fase relativa

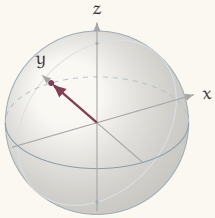
Consideriamo $G = \hbar\omega Z/2$, dove $Z = \mathrm{diag}(1, -1)$ e ω ha unità di inverso del tempo. Le due energie sono $+\hbar\omega/2$ e $-\hbar\omega/2$.

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2} \end{pmatrix}.$$

Sulla preparazione diagonale:

$$U(t)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{e^{-i\omega t/2}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\omega t} \end{pmatrix}.$$

La fase relativa cresce di ωt.



Dopo $\omega t = \pi/2$, il punto equatoriale raggiunge $+y$.

Il fattore comune ha modulo uno. La differenza di energia determina la velocità della fase relativa.

Seguire la fase relativa lungo l'equatore

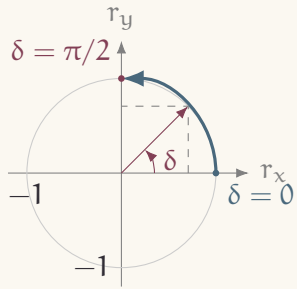
Con $\delta = \omega t$ e $g = e^{-i\delta/2}$, si ha $\alpha = g/\sqrt{2}$, $\beta = ge^{i\delta}/\sqrt{2}$. Dunque

$$q = \alpha^* \beta = \frac{g^* g\, e^{i\delta}}{2} = \frac{e^{i\delta/2} e^{-i\delta/2} e^{i\delta}}{2} = \frac{e^{i\delta}}{2}.$$

Dalla formula di Eulero segue

$$r_x = 2\frac{\cos\delta}{2} = \cos\delta, \quad r_y = 2\frac{\sin\delta}{2} = \sin\delta,$$

$$r_z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$



$r_z = 0$: equatore di Bloch.
$r_x^2 + r_y^2 = \cos^2\delta + \sin^2\delta = 1$.

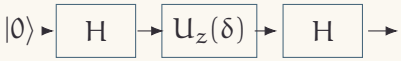
La traiettoria va da $(1,0,0)$, per $\delta = 0$, a $(0,1,0)$, per $\delta = \pi/2$.

Ricombinare lo stato evoluto

La sequenza è $0 \to H \to U(t) \to H$, con $\delta = \omega t$ e $g = e^{-i\delta/2}$. Prima dell'ultima H lo stato è $g(1, e^{i\delta})^T/\sqrt{2}$.

$$H \frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\delta} \end{pmatrix} = \frac{g}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\delta} \end{pmatrix} = \frac{g}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^{i\delta} \\ 1 - e^{i\delta} \end{pmatrix}.$$

Quindi $a_0 = g(1 + e^{i\delta})/2$ e $a_1 = g(1 - e^{i\delta})/2$.



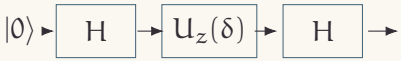
$U_z(\delta) = \mathrm{diag}(e^{-i\delta/2}, e^{i\delta/2})$
Lettura finale nella base 0/1.

Il fattore g è comune alle due ampiezze e viene conservato fino al calcolo delle probabilità.

La probabilità dell'uscita 0

Con $a_0 = g(1 + e^{i\delta})/2$ e $g = e^{-i\delta/2}$ si ha $g^* g = e^{i\delta/2} e^{-i\delta/2} = 1$.

$$\begin{aligned} P(0) &= \frac{(1 + e^{-i\delta})(1 + e^{i\delta})}{4} \\ &= \frac{1 + e^{i\delta} + e^{-i\delta} + e^{0}}{4} \\ &= \frac{2 + (\cos\delta + i\sin\delta)}{4} \\ &\quad + \frac{\cos\delta - i\sin\delta}{4} \\ &= \frac{2 + 2\cos\delta}{4} = \frac{1 + \cos\delta}{2}. \end{aligned}$$



$U_z(\delta) = \mathrm{diag}(e^{-i\delta/2}, e^{i\delta/2})$

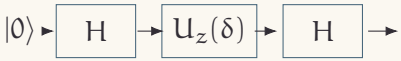
Lettura finale nella base 0/1.

I termini immaginari si cancellano. La somma delle due probabilità è (2+0)/2=1.

La probabilità dell'uscita 1

Con $a_1 = g(1 - e^{i\delta})/2$ e $g = e^{-i\delta/2}$ si ha $g^* g = e^{i\delta/2} e^{-i\delta/2} = 1$.

$$\begin{aligned} P(1) &= \frac{(1 - e^{-i\delta})(1 - e^{i\delta})}{4} \\ &= \frac{1 - e^{i\delta} - e^{-i\delta} + e^{0}}{4} \\ &= \frac{2 - (\cos\delta + i\sin\delta)}{4} \\ &\quad - \frac{\cos\delta - i\sin\delta}{4} \\ &= \frac{2 - 2\cos\delta}{4} = \frac{1 - \cos\delta}{2}. \end{aligned}$$



$U_z(\delta) = \mathrm{diag}(e^{-i\delta/2}, e^{i\delta/2})$

Lettura finale nella base 0/1.

I termini immaginari si cancellano. La somma delle due probabilità è (2+0)/2=1.

Costruire una rotazione a partire dagli autovettori

Consideriamo ora $G_x = \hbar\Omega X/2$, con $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Le direzioni proprie sono le due diagonali: $X|+\rangle = |+\rangle$ e $X|-\rangle = -|-\rangle$. Poniamo $\theta = \Omega t$.

I proiettori sulle due direzioni sono

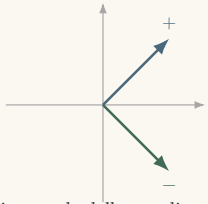
$$P_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi $P_+ + P_- = I$, $P_+ - P_- = X$ e

$$U_x = e^{-i\theta/2}P_+ + e^{i\theta/2}P_-.$$

La combinazione verrà sviluppata nella pagina seguente:

$$U_x = \cos(\theta/2)I - i\sin(\theta/2)X.$$



Piano reale delle coordinate. Le fasi evolvono separatamente sulle direzioni proprie.

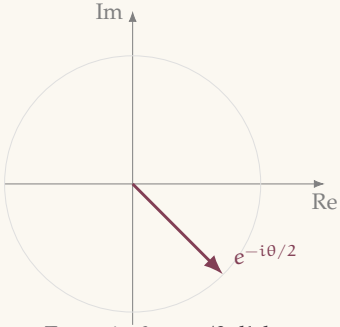
La scomposizione spettrale trasforma l'esponenziale della matrice in due esponenziali scalari.

Distribuire le due fasi sui proiettori

Per $G_x = \hbar\Omega X/2$, poniamo $\theta = \Omega t$, $c = \cos(\theta/2)$, $s = \sin(\theta/2)$. La formula di Eulero dà $e^{-i\theta/2} = c - is$ ed $e^{i\theta/2} = c + is$. Pertanto

$$\begin{aligned} U_x &= (c - is)P_+ + (c + is)P_- \\ &= cP_+ - isP_+ + cP_- + isP_- \\ &= c(P_+ + P_-) - is(P_+ - P_-) \\ &= cI - isX. \end{aligned}$$

Sono state usate $P_+ + P_- = I$ e $P_+ - P_- = X$.



Esempio $\theta = \pi/2$; l'altra fase è il punto coniugato.

Il segno negativo viene dalla legge temporale; il mezzo angolo viene dagli autovalori del generatore.

Dalla rotazione alle probabilità

Scriviamo $c = \cos(\theta/2)$ e $s = \sin(\theta/2)$. Queste abbreviazioni consentono di seguire il prodotto senza perdere i fattori che determinano le probabilità.

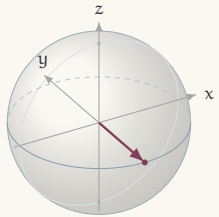
$$U_x = \begin{pmatrix} c & -is \\ -is & c \end{pmatrix}.$$

Su un ingresso $|0\rangle$:

$$U_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot 1 - is \cdot 0 \\ -is \cdot 1 + c \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -is \end{pmatrix}.$$

$$P(0) = c^2, \qquad P(1) = |-is|^2 = s^2.$$

Poiché $c^2 + s^2 = 1$, la norma resta uno.



Per $\theta = \pi/2$: ampiezze $(1, -i)/\sqrt{2}$; punto sul semiasse $-y$.

La rotazione è attiva: cambia lo stato, mentre la base della lettura rimane fissata. L'angolo sulla sfera è θ, quello nelle ampiezze è $\theta/2$.

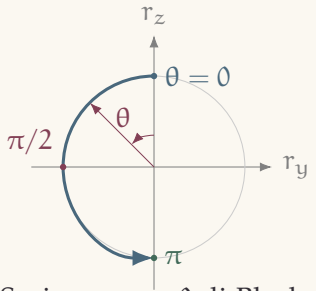
Il mezzo angolo delle ampiezze sulla sfera

Per $U_x e_1 = (c, -is)^T$, con $c = \cos(\theta/2)$ e $s = \sin(\theta/2)$ reali, si ha $q = c(-is) = -ics$. Quindi

$$r_x = 2\,\mathrm{Re}(-ics) = 0,$$
$$r_y = 2\,\mathrm{Im}(-ics) = -2cs = -\sin\theta,$$
$$r_z = |c|^2 - |-is|^2 = c^2 - s^2 = \cos\theta.$$

Le formule di duplicazione danno quindi

$$\mathbf{r}(0) = (0, 0, 1),$$
$$\mathbf{r}(\pi/2) = (0, -1, 0),$$
$$\mathbf{r}(\pi) = (0, 0, -1).$$



Sezione $r_x = 0$ di Bloch. L'angolo è θ; nelle ampiezze è $\theta/2$.

Il segno di r_y segue dalla fase $-i$ dell'ampiezza e fissa l'orientazione della rotazione.

Approfondimento fisico: la durata di un impulso

Un comando risonante può realizzare una rotazione del qubit. Nel modello ideale l'intensità resta fissa e la durata stabilisce l'angolo. Dopo aver definito l'operazione possiamo collegarla a una calibrazione sperimentale.

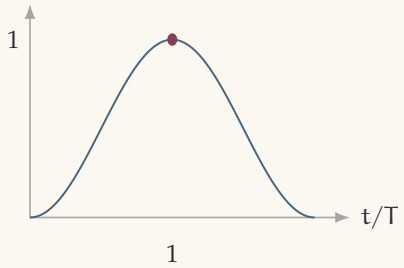
Se l'angolo è $\theta = \Omega t$, per un ingresso 0:

$$P(1) = \sin^2(\Omega t/2).$$

Il primo trasferimento completo soddisfa

$$\Omega T/2 = \pi/2, \quad T = \pi/\Omega.$$

Ogni punto della curva richiede nuove preparazioni.

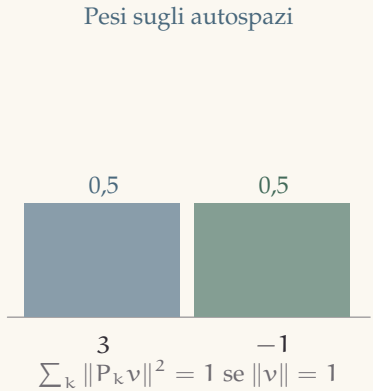


Torna all'evoluzione Prosegui. La forma dell'impulso e gli errori del dispositivo richiedono un modello fisico più dettagliato.

Capitolo 12

Un problema di algebra completo

Raccogliamo spettro, proiettori e forme quadratiche nello stesso calcolo. I risultati passeranno poi alla probabilità.



Il problema: una matrice e un vettore

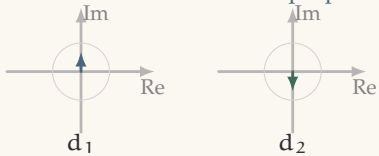
Siano

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 2i & 1 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

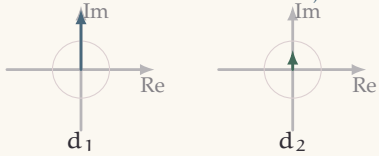
Cerchiamo spettro, proiettori, $v^\dagger M v$ e $v^\dagger M^2 v$.

La diagonale è reale e $(-2i)^* = 2i$, dunque $M^\dagger = M$.

Coordinate di v nella base propria



Coordinate di Mv: fattori $3, -1$



Le coordinate proprie mostrate in figura saranno calcolate alla fine dell'esempio; il vettore v e la base di riferimento rimangono gli stessi.

Esempio completo: spettro di M

$$\det(M - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - (-2i)(2i)$$
$$= (1-\lambda)^2 - 4.$$

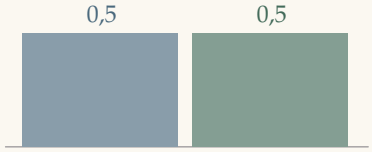
Quindi $1 - \lambda = \pm 2$: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$.

Per 3: $-2x - 2iy = 0 \Rightarrow x = -iy$.

Per -1: $2x - 2iy = 0 \Rightarrow x = iy$.

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i, 1)^T, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i, 1)^T.$$

Pesi sugli autospazi



$\sum_k \|P_k v\|^2 = 1$ se $\|v\| = 1$

Nel determinante $(-2i)(2i) = -4i^2 = 4$. Le norme e le seconde equazioni vengono controllate nella pagina seguente.

Controllare le direzioni proprie di M

Per $\lambda = 3$ scegliamo $y = 1$, quindi $x = -i$. La seconda equazione è $2ix - 2y = 0$:

$$2i(-i) - 2 = 2 - 2 = 0.$$

Per $\lambda = -1$, $y = 1$ dà $x = i$. La seconda equazione diventa

$$2ix + 2y = 2i^2 + 2 = -2 + 2 = 0.$$

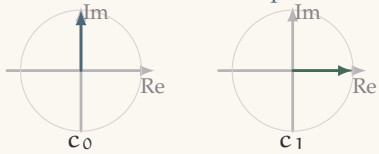
Le norme al quadrato valgono $|-i|^2 + 1 = |i|^2 + 1 = 2$. Dividendo per $\sqrt{2}$ otteniamo u_1, u_2, con

$$u_1^\dagger u_2 = \frac{i \cdot i + 1 \cdot 1}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0.$$

u_1: direzioni delle componenti



u_2: direzioni delle componenti



Nei piccoli piani le frecce mostrano le componenti prima della divisione comune per $\sqrt{2}$.

I singoli prodotti dei proiettori di M

Per i due vettori normalizzati, i prodotti esterni sono

$$P_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-i)i & (-i)1 \\ 1i & 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i(-i) & i\cdot 1 \\ 1(-i) & 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Le entrate in alto a sinistra valgono entrambe $-i^2 = 1$. In ciascuna matrice gli elementi fuori diagonale sono coniugati. La somma dei due proiettori e la ricostruzione di M seguono nella pagina successiva.

Numeratore di P_1

	0	1
0	1	$-i$
1	i	1

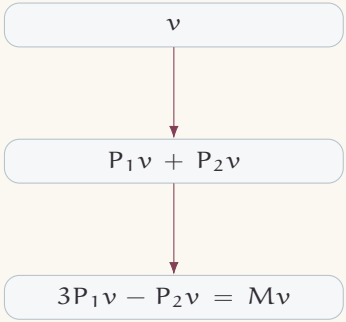
Esempio completo: i due proiettori

$$P_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}(i \;\; 1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}(-i \;\; 1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I.$$

$$3P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3-1 & -3i-i \\ 3i+i & 3-1 \end{pmatrix} = M.$$



La selezione delle componenti e la loro moltiplicazione per gli autovalori sono operazioni distinte.

Esempio completo: proprietà dei proiettori

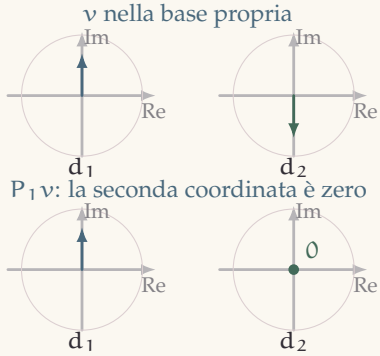
Poniamo $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$, quindi $P_1 = B/2$.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1+(-i)i & -i-i \\ i+i & i(-i)+1 \end{pmatrix} = 2B.$$

Allora $P_1^2 = B^2/4 = B/2 = P_1$.

$$P_1 P_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+(-i)(-i) & i-i \\ i-i & i^2+1 \end{pmatrix} = 0.$$

Entrambi i proiettori sono hermitiani.



Proiettare due volte sulla stessa componente equivale a proiettare una volta; passare a quella ortogonale dà zero.

Verificare anche il secondo proiettore

Poniamo $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{smallmatrix}\right)$, così $P_2 = C/2$.

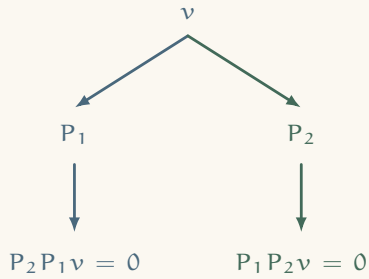
$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 + i(-i) & i + i \\ -i - i & (-i)i + 1 \end{pmatrix}.$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix} = 2C.$$

Quindi $P_2^2 = C^2/4 = C/2 = P_2$. In entrambe le matrici la diagonale è reale e gli elementi fuori diagonale sono coniugati: $P_j^\dagger = P_j$.

Infine

$$P_2 P_1 = (P_1 P_2)^\dagger = 0^\dagger = 0.$$



Proiezioni su direzioni ortogonali

Le due verifiche di idempotenza e i due prodotti misti coprono tutte le coppie di proiettori.

Esempio completo: calcolo diretto

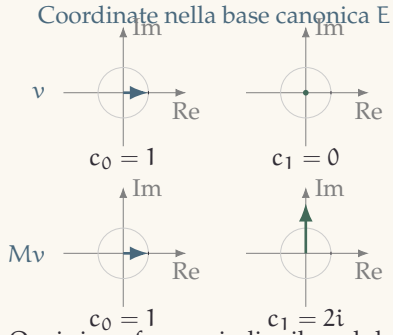
Con $v = (1, 0)^T$:

$$Mv = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 2i \cdot 0 \\ 2i \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}.$$

Moltiplichiamo per $v^\dagger = (1, 0)$:

$$v^\dagger Mv = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2i = 1.$$

Per il secondo momento dobbiamo applicare M due volte; calcoliamo prima la matrice M^2.



Ogni circonferenza indica il modulo 1.
Stessa scala nei quattro piani complessi.

Il calcolo e la figura usano la base canonica E: il prodotto con $v^\dagger = (1, 0)$ seleziona la prima componente.

Il quadrato di M e il secondo momento

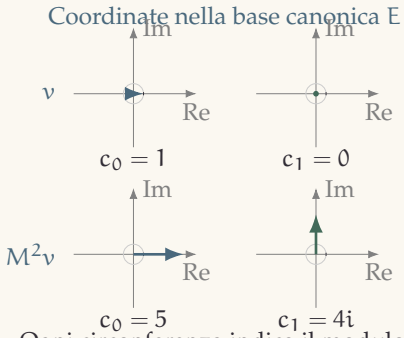
Le quattro entrate di M^2 sono

$$1 \cdot 1 + (-2i)(2i) = 1 - 4i^2 = 5,$$
$$1(-2i) + (-2i)1 = -4i,$$
$$(2i)1 + 1(2i) = 4i,$$
$$(2i)(-2i) + 1 \cdot 1 = -4i^2 + 1 = 5.$$

Quindi $M^2 = \left(\begin{smallmatrix} 5 & -4i \\ 4i & 5 \end{smallmatrix}\right)$ e

$$M^2 v = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 - 4i \cdot 0 \\ 4i \cdot 1 + 5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4i \end{pmatrix}.$$

Infine $v^\dagger M^2 v = 1 \cdot 5 + 0 \cdot 4i = 5$.



Ogni circonferenza indica il modulo 1.
Stessa scala nei quattro piani complessi.

Calcolare le coordinate proprie di v

Passiamo ora dalla base canonica E alla base propria $U = (u_1, u_2)$. Le nuove coordinate sono $d = U^\dagger v$. Per $v = (1, 0)^\top$:

$$u_1^\dagger v = \frac{i \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{2}} = \frac{i}{\sqrt{2}},$$

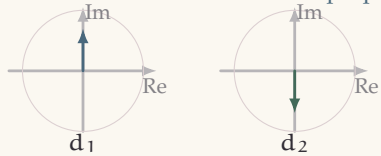
$$u_2^\dagger v = \frac{-i \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{2}} = -\frac{i}{\sqrt{2}}.$$

I moduli quadri sono

$$\left|\frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{(-i)i}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \left|\frac{-i}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{i(-i)}{2} = \frac{1}{2}.$$

I pesi sono positivi e sommano a uno.

Le coordinate nelle due direzioni proprie



Nella base canonica $v = (1, 0)^\top$; nella base propria $d = (i, -i)^\top/\sqrt{2}$. Le due colonne descrivono lo stesso vettore.

Esempio completo: controllo spettrale

Le due direzioni proprie hanno autovalori $3, -1$ e pesi $1/2, 1/2$. Usando la decomposizione spettrale:

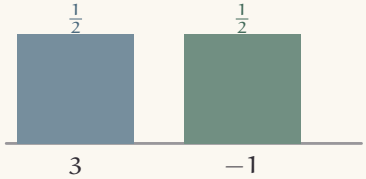
$$v^\dagger M v = 3 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

Per il secondo momento si elevano al quadrato gli autovalori:

$$v^\dagger M^2 v = 3^2 \cdot \frac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5.$$

I risultati coincidono con i due prodotti matriciali. I pesi definiscono una media che interpreteremo nella parte probabilistica.

Pesi sulle due direzioni proprie



La seconda parte interpreta questi pesi.

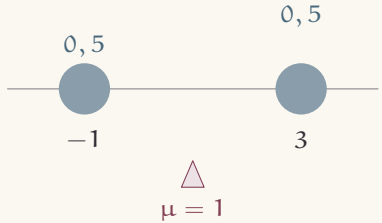
Abbiamo ottenuto una media pesata. La parte successiva ne studia il significato probabilistico.

Parte 2

II · Probabilità e dati

I calcoli forniscono pesi e valori. Per confrontarli con un esperimento occorre descrivere distribuzioni, medie e fluttuazioni.

La media come baricentro



Pesi sopra i punti; aree proporzionali

Le sezioni della parte 2

13 Esiti ed eventi

14 Variabili aleatorie discrete

15 Valore atteso

16 Varianza e dispersione

17 Prove ripetute e binomiale

18 Frequenze e precisione

19 Condizionamento e Bayes

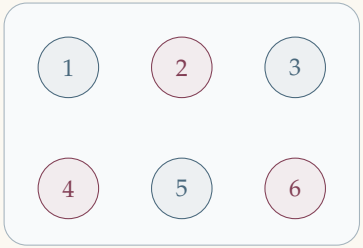
20 Distribuzioni congiunte

Capitolo 13

Esiti ed eventi

Una distribuzione assegna un peso a ogni esito. Un evento raccoglie gli esiti che rispondono alla stessa domanda.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



Esiti evidenziati: evento scelto

Dagli esiti agli eventi

Per un esperimento finito indichiamo con Ω l'insieme degli esiti.

Un evento è un sottoinsieme $E \subseteq \Omega$.

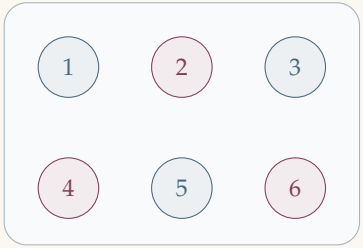
Nel lancio di un dado:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

L'evento "esce un numero pari" è

$$E = \{2, 4, 6\}.$$

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



Esiti evidenziati: evento scelto

Il singolo esito descrive ciò che accade; l'evento descrive la domanda che poniamo.

Assegnare probabilità coerenti

Assegniamo a ogni esito un peso p_k con

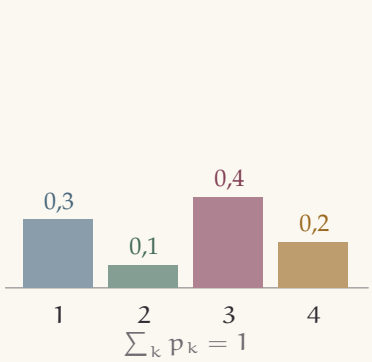
$$p_k \geq 0, \qquad \sum_k p_k = 1.$$

La probabilità di un evento è

$$P(E) = \sum_{\omega_k \in E} p_k.$$

Ne seguono $P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$ e l'additività sugli eventi disgiunti.

I pesi sono dati del modello; gli assiomi non ne determinano il valore.



Contare gli esiti è sufficiente soltanto quando sono equiprobabili.

Esempio: normalizzare quattro pesi

Partiamo dai pesi $(3, 1, 4, 2)$.

$$W = 3 + 1 + 4 + 2 = 10.$$

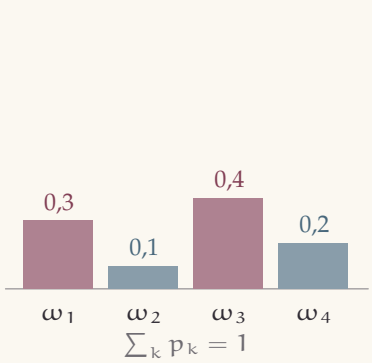
Dividiamo ogni peso per W:

$$p = \left(\frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{4}{10}, \frac{2}{10}\right).$$

Per $E = \{\omega_1, \omega_3\}$:

$$P(E) = \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}.$$

Il complementare pesa $(1 + 2)/10 = 3/10$.



La normalizzazione conserva i rapporti fra i pesi.

Unione, intersezione e complementare

L'unione $E \cup F$ contiene gli esiti in almeno uno dei due eventi; l'intersezione $E \cap F$ quelli comuni.

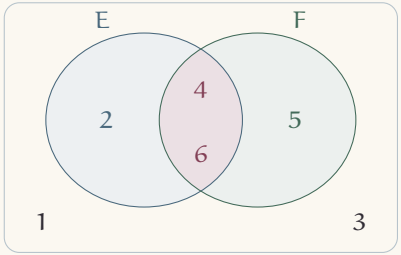
$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F).$$

L'intersezione va sottratta perché è stata contata due volte.

$$P(E^c) = 1 - P(E).$$

Se $E \subseteq F$, allora $P(E) \leq P(F)$.

$E = \{2, 4, 6\}, \quad F = \{4, 5, 6\}$



In comune: $E \cap F = \{4, 6\}$

La figura anticipa due eventi del lancio di un dado; la regione comune raccoglie gli esiti 4 e 6.

Esempio: due eventi nello stesso lancio

Per un dado equilibrato poniamo

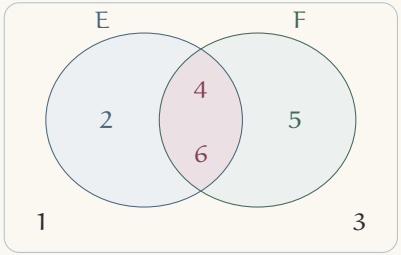
$$E = \{2, 4, 6\}, \qquad F = \{4, 5, 6\}.$$

Si ha $E \cap F = \{4, 6\}$ e $E \cup F = \{2, 4, 5, 6\}$.

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} \\ &= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Controllo: l'unione contiene quattro esiti equiprobabili su sei.

$E = \{2, 4, 6\}, \quad F = \{4, 5, 6\}$



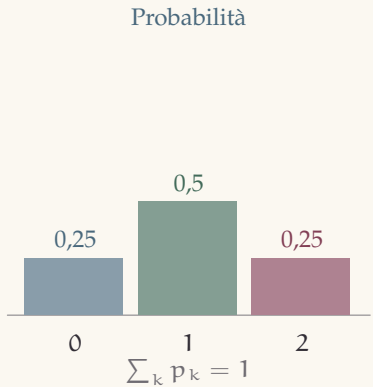
In comune: $E \cap F = \{4, 6\}$

La somma $P(E) + P(F) = 1$ sarebbe errata perché conterebbe due volte 4 e 6.

Capitolo 14

Variabili aleatorie discrete

Spesso registriamo un numero associato all'esito. Esiti distinti possono produrre lo stesso numero.



Una funzione sugli esiti

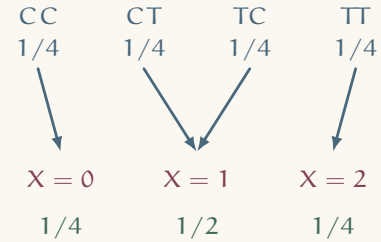
Una variabile aleatoria discreta è una funzione

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

La distribuzione di X si ottiene raccogliendo gli esiti con lo stesso valore:

$$P(X = x) = \sum_{\omega : X(\omega) = x} P(\{\omega\}).$$

La distribuzione conserva le probabilità dei valori di interesse.



Si sommano i pesi che arrivano allo stesso valore.

Nel conteggio delle teste, i due esiti TC e CT contribuiscono entrambi al valore $X = 1$.

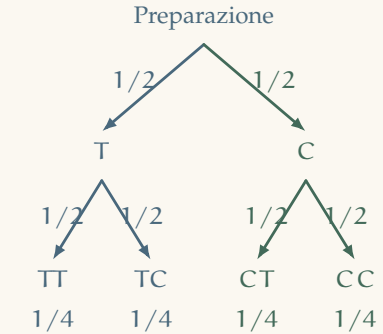
Quando si possono moltiplicare le probabilità

Assumiamo che ogni lancio dia testa o croce con probabilità 1/2, e che conoscere il primo risultato lasci invariate le probabilità del secondo. Questa è l'indipendenza fra le due prove.

La probabilità di una sequenza si ottiene moltiplicando i pesi dei suoi due passaggi:

$$\mathrm{P}(\mathrm{TT}) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}, \quad \mathrm{P}(\mathrm{TC}) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4},$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{CT}) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}, \quad \mathrm{P}(\mathrm{CC}) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}.$$

I quattro percorsi sono distinti e coprono tutti gli esiti.



Si moltiplicano i pesi lungo ogni percorso.

I pesi del secondo lancio sono uguali nei due rami. Più avanti esprimeremo l'indipendenza anche mediante gli eventi.

Esempio: due lanci, tre valori

Lanciamo due volte una moneta equilibrata, con lanci indipendenti.

$$P(TT) = P(TC) = P(CT) = P(CC) = \frac{1}{4}.$$

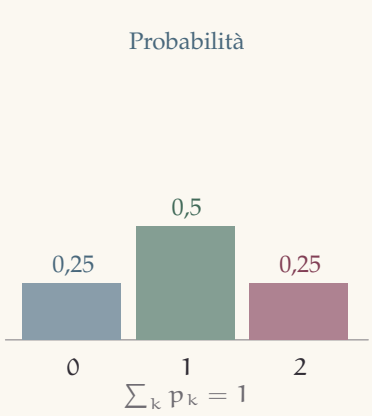
Per il numero di teste X:

$$X(TT) = 2,\ X(TC) = X(CT) = 1,\ X(CC) = 0.$$

Quindi

$$P(X = 0) = \frac{1}{4}, \qquad P(X = 2) = \frac{1}{4},$$

$$P(X = 1) = P(TC) + P(CT) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$



Quattro esiti elementari danno tre valori numerici distinti.

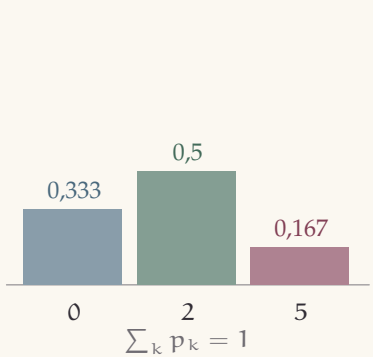
Esempio: raggruppare sei esiti non equiprobabili

Le probabilità dei sei esiti sono

$$\frac{1}{12}(1,2,3,1,4,1),$$

mentre i valori di X sono $(0,2,0,5,2,5)$.

$$P(X=0) = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4}{12},$$
$$P(X=2) = \frac{2}{12} + \frac{4}{12} = \frac{6}{12},$$
$$P(X=5) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12}.$$



La somma dei pesi raggruppati resta $(4+6+2)/12 = 1$.

Cambiare la variabile, conservare i pesi

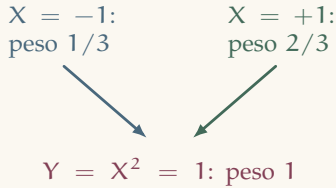
Se $Y = g(X)$, ogni valore x produce $g(x)$.

Per $Y = X^2$ nell'esempio precedente:

$$0 \mapsto 0, \qquad 2 \mapsto 4, \qquad 5 \mapsto 25.$$

Le probabilità sono ancora $4/12, 6/12, 2/12$.

Se due valori distinti hanno la stessa immagine, i loro pesi si sommano: per $X = \pm 1$, entrambe le immagini valgono $X^2 = 1$.



Le due immagini coincidono: si sommano i pesi.

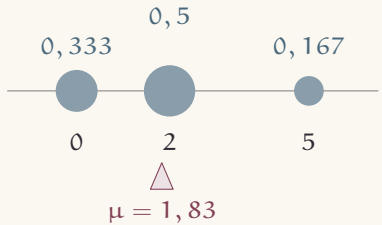
Per esempio, se $P(X = -1) = 1/3$ e $P(X = 1) = 2/3$, allora $P(X^2 = 1) = 1/3 + 2/3 = 1$.

Capitolo 15

Valore atteso

La media è il punto di equilibrio dei valori possibili, ciascuno pesato dalla propria probabilità.

La media come baricentro



Pesi sopra i punti; aree proporzionali

Una media pesata

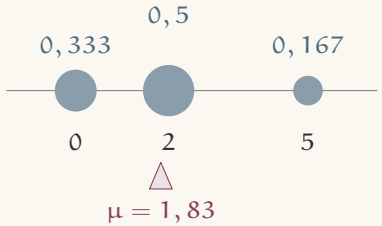
Per una variabile discreta:

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \sum_x x P(X = x).$$

I valori sono posizioni su un asse; le probabilità sono pesi.

La media appartiene all'intervallo fra valore minimo e massimo, ma può non essere un valore possibile dell'esperimento.

La media come baricentro



Pesi sopra i punti; aree proporzionali

La media descrive il centro della distribuzione, non il risultato di una singola prova.

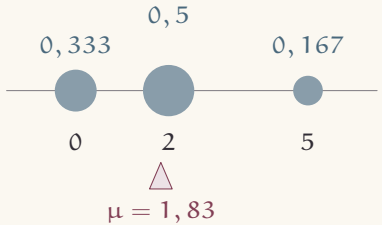
Esempio: calcolare il baricentro

Per $X = 0, 2, 5$ con pesi $4/12, 6/12, 2/12$:

$$\begin{aligned}\mu &= 0 \cdot \frac{4}{12} + 2 \cdot \frac{6}{12} + 5 \cdot \frac{2}{12} \\ &= \frac{0 + 12 + 10}{12} \\ &= \frac{22}{12} = \frac{11}{6}.\end{aligned}$$

Il valore medio $11/6 \simeq 1{,}83$ è compreso fra 0 e 5 e differisce dai singoli esiti $0, 2, 5$.

La media come baricentro



Pesi sopra i punti; aree proporzionali

Il peso maggiore vicino a 2 colloca il baricentro poco sotto quel valore.

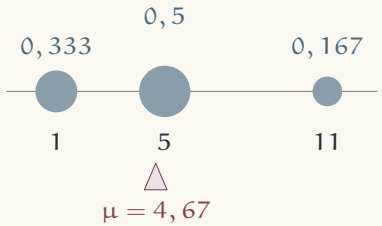
Linearità del valore atteso

Per costanti a, b,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[aX + b] &= \sum_x (ax + b)p_x \\ &= a\sum_x xp_x + b\sum_x p_x \\ &= a\mathbb{E}[X] + b.\end{aligned}$$

La stessa regola vale per somme di variabili, come verifichiamo usando gli esiti elementari.

La media come baricentro



Pesi sopra i punti; aree proporzionali

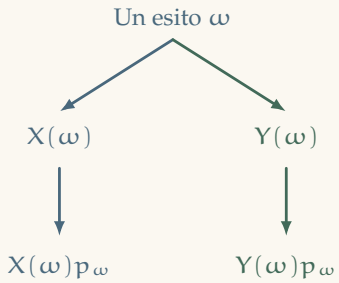
Nel disegno $Y = 2X + 1$: il baricentro diventa $2(11/6) + 1 = 22/6 + 6/6 = 28/6 = 14/3$.

La media di una somma

Ogni esito ω determina sia $X(\omega)$ sia $Y(\omega)$.
Sommando sui medesimi esiti, con peso p_ω:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X+Y] &= \sum_\omega [X(\omega)+Y(\omega)]p_\omega \\ &= \sum_\omega X(\omega)p_\omega + \sum_\omega Y(\omega)p_\omega \\ &= \mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y].\end{aligned}$$

La distribuzione dei pesi rimane la stessa nei due termini. Il passaggio usa la proprietà distributiva e vale anche quando le variabili sono dipendenti.



Le due somme usano gli stessi pesi.

Sommare prima per esiti o raggruppare prima i valori uguali restituisce lo stesso valore atteso.

Momento secondo: media dei quadrati

Il momento secondo è

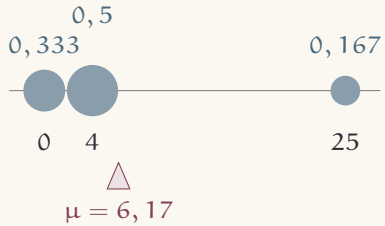
$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_x x^2 p_x.$$

Per l'esempio $0, 2, 5$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= 0^2 \frac{4}{12} + 2^2 \frac{6}{12} + 5^2 \frac{2}{12} \\ &= \frac{0 + 24 + 50}{12} \\ &= \frac{74}{12} = \frac{37}{6}.\end{aligned}$$

Invece $\mathbb{E}[X]^2 = (11/6)^2 = 121/36$.

La media come baricentro



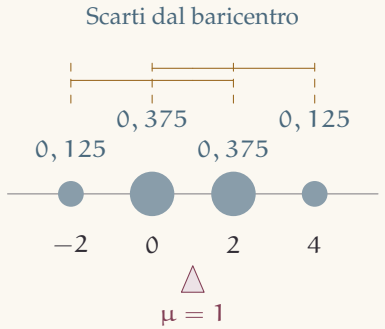
Pesi sopra i punti; aree proporzionali

La media dei quadrati e il quadrato della media descrivono quantità diverse.

Capitolo 16

Varianza e dispersione

Due distribuzioni possono avere lo stesso centro e ampiezze molto diverse. Gli scarti dal centro distinguono i due casi.



Pesi sopra i punti; aree proporzionali

Misurare gli scarti dalla media

La varianza è la media degli scarti quadratici:

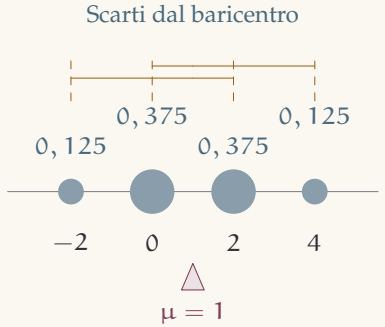
$$\mathrm{Var}(X) = \sum_x p_x (x - \mu)^2.$$

Ogni contributo è non negativo, quindi $\mathrm{Var}(X) \geq 0$.

Lo scarto quadratico medio

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

ha le stesse unità di misura di X.



Pesi sopra i punti; aree proporzionali

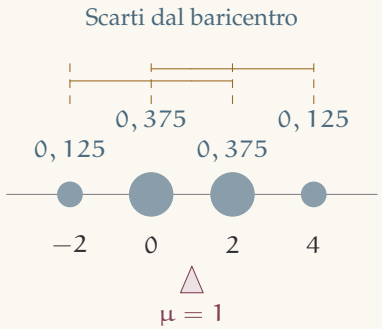
Gli scarti si elevano al quadrato per evitare che quelli positivi e negativi si cancellino.

Derivare la formula di calcolo

Sviluppiamo ogni quadrato:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \sum_x p_x(x^2 - 2\mu x + \mu^2) \\ &= \sum_x p_x x^2 - 2\mu \sum_x p_x x \\ &\quad + \mu^2 \sum_x p_x \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mu^2.\end{aligned}$$

Abbiamo usato $\sum p_x = 1$ e $\sum p_x x = \mu$.



Pesi sopra i punti; aree proporzionali

La formula deriva dalla definizione: non è una nuova ipotesi sulla distribuzione.

Esempio: media e momento secondo

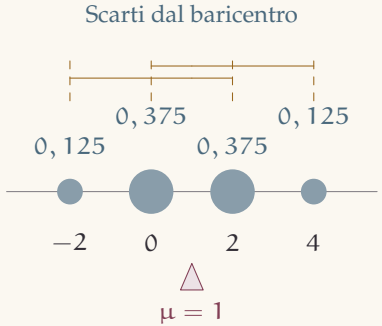
Per valori $(-2, 0, 2, 4)$ e pesi $(1, 3, 3, 1)/8$:

$$\mu = \frac{(-2)\cdot 1 + 0\cdot 3 + 2\cdot 3 + 4\cdot 1}{8} = \frac{-2+0+6+4}{8} = 1,$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{(-2)^2\cdot 1 + 0^2\cdot 3 + 2^2\cdot 3 + 4^2\cdot 1}{8} = \frac{4+0+12+16}{8} = 4.$$

Perciò

$$\mathrm{Var}(X) = 4 - 1^2 = 3, \qquad \sigma_X = \sqrt{3}.$$



Pesi sopra i punti; aree proporzionali

Il baricentro si trova in 1; i valori sono disposti simmetricamente attorno a esso.

Esempio: controllare con gli scarti

La media è 1. Gli scarti sono

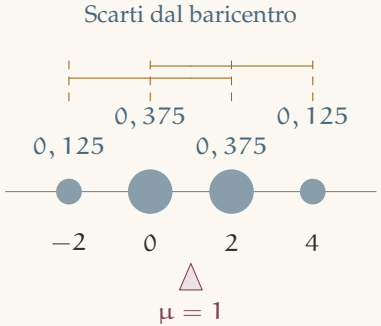
$$(-2-1, 0-1, 2-1, 4-1) = (-3, -1, 1, 3).$$

I quadrati sono $(9, 1, 1, 9)$.

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{9 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 9 \cdot 1}{8}$$

$$= \frac{24}{8} = 3.$$

Si ritrova il risultato ottenuto dal momento secondo.



Pesi sopra i punti; aree proporzionali

La verifica usa la definizione originaria e controlla anche il corretto valore della media.

Esempio: stessa media, dispersioni diverse

Per valori $-1, +1$ con pesi $1/2, 1/2$:

$$\mu_1 = \frac{-1+1}{2} = 0,$$

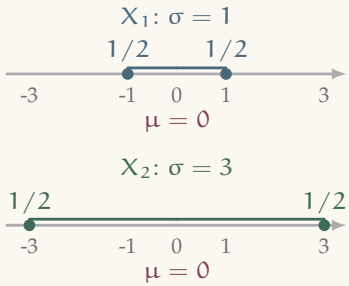
$$\mathrm{Var}(X_1) = \frac{(-1-0)^2 + (1-0)^2}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Per valori $-3, +3$ con gli stessi pesi:

$$\mu_2 = \frac{-3+3}{2} = 0,$$

$$\mathrm{Var}(X_2) = \frac{(-3-0)^2 + (3-0)^2}{2} = \frac{9+9}{2} = 9.$$

Le deviazioni standard sono $\sqrt{1} = 1$ e $\sqrt{9} = 3$.



I due assi hanno la stessa scala: il confronto rende visibile la diversa dispersione.

Quando la varianza è nulla

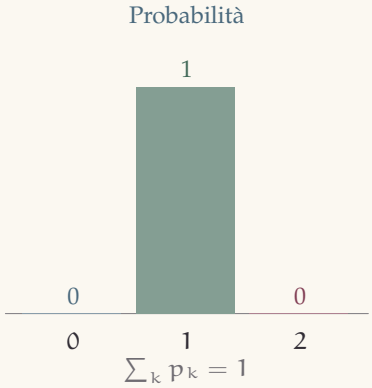
Nella somma

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_x p_x (x - \mu)^2$$

ogni termine è non negativo.

La somma è zero se tutta la probabilità è concentrata su un solo valore, che coincide con μ.

Possono esistere più esiti elementari con quel medesimo valore: ciò che conta è il valore della variabile.

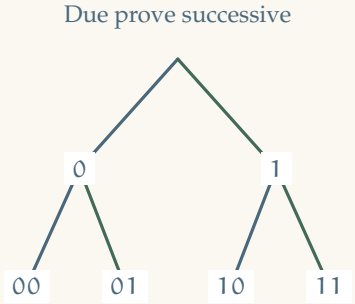


Questa distinzione servirà quando un autovalore corrisponde a un autospazio di dimensione maggiore di uno.

Capitolo 17

Prove ripetute e binomiale

Ripetere una preparazione produce una sequenza. Contare i successi significa raggruppare sequenze diverse.



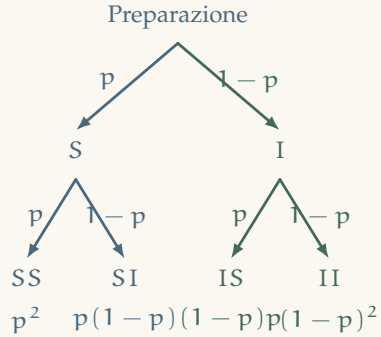
Lo schema di Bernoulli

Ogni prova ha due esiti: successo con probabilità p, insuccesso con probabilità $1 - p$.

Ripetiamo n prove indipendenti con lo stesso p. La variabile K conta i successi.

Una specifica sequenza con k successi e $n - k$ insuccessi ha probabilità

$$p^k(1-p)^{n-k}.$$



Si moltiplicano i pesi lungo ogni percorso.

Per esempio, SIS ha peso $p(1-p)p = p^2(1-p)$. Ogni prova conserva probabilità p dopo qualunque sequenza precedente.

Contare le disposizioni senza contarle due volte

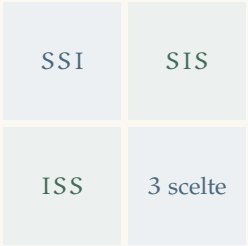
Il fattoriale $n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ conta gli ordinamenti di n oggetti distinti; si pone $0! = 1$.

Per scegliere k posizioni, possiamo ordinarle in $n(n-1)\cdots(n-k+1) = n!/(n-k)!$ modi. Ogni insieme di posizioni compare $k!$ volte, una per ciascun ordine interno. Dividiamo quindi per $k!$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Con tre posizioni e due successi, le scelte sono $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$: tre sequenze.

Scegliere due posizioni su tre



La scelta delle posizioni riguarda il conteggio; i valori di p entrano successivamente nei pesi.

Da una sequenza al conteggio

Le posizioni dei k successi si possono scegliere in

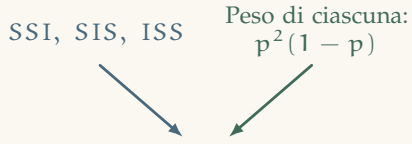
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

modi. Sommando le probabilità delle sequenze:

$$P(K = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Per $n = 3$, $k = 2$, le sequenze sono SSI, SIS, ISS:

$$\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 3.$$



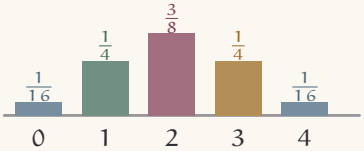
Il coefficiente binomiale conta sequenze distinte con lo stesso numero di successi.

I cinque coefficienti per quattro prove

Poiché $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, $3! = 6$ e $2! = 2$,

$$\binom{4}{0} = \frac{24}{1 \cdot 24} = 1, \quad \binom{4}{1} = \frac{24}{1 \cdot 6} = 4,$$
$$\binom{4}{2} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6, \quad \binom{4}{3} = \frac{24}{6 \cdot 1} = 4,$$
$$\binom{4}{4} = \frac{24}{24 \cdot 1} = 1.$$

Quote delle 16 sequenze



Il conteggio è 1, 4, 6, 4, 1; qui ogni sequenza conta una volta.

Questa figura mostra soltanto il numero di sequenze; le probabilità con $p = 1/3$ saranno diverse.

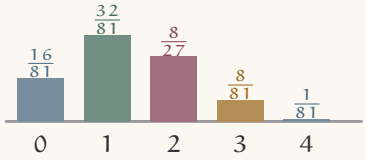
Calcolare i fattori delle probabilità

Per $p = 1/3$ e $1 - p = 2/3$:

$$(1/3)^2 = 1/9,$$
$$(1/3)^3 = (1/9)(1/3) = 1/27,$$
$$(1/3)^4 = (1/27)(1/3) = 1/81.$$
$$(2/3)^2 = 4/9,$$
$$(2/3)^3 = (4/9)(2/3) = 8/27,$$
$$(2/3)^4 = (8/27)(2/3) = 16/81.$$

Le potenze di esponente zero valgono uno.

La distribuzione che ricaveremo



I cinque pesi verranno calcolati nelle due pagine successive.

Esempio: quattro prove con $p = 1/3$

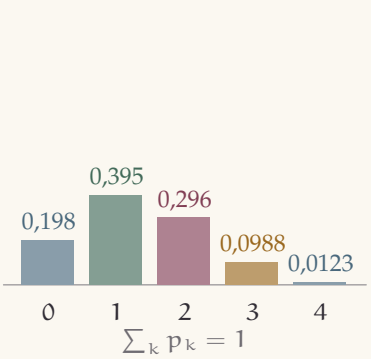
Per $n = 4$:

$$P(K = 0) = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81},$$

$$P(K = 1) = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81},$$

$$P(K = 2) = 6 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{81}.$$

Abbiamo usato $\binom{4}{0} = 1$, $\binom{4}{1} = 4$, $\binom{4}{2} = 6$.



La distribuzione può essere asimmetrica quando successo e insuccesso hanno probabilità diverse.

Esempio: completare e controllare la distribuzione

Gli ultimi due valori sono

$$P(K=3) = 4 \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{81},$$

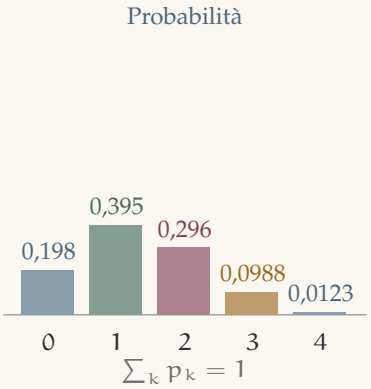
$$P(K=4) = 1 \cdot \frac{1}{81} \cdot 1 = \frac{1}{81}.$$

La somma è

$$\frac{16+32+24+8+1}{81} = 1.$$

Per almeno un successo:

$$P(K \geq 1) = 1 - P(K=0) = \frac{81-16}{81} = \frac{65}{81}.$$



Usare il complementare evita quattro somme quando interessa soltanto la presenza di almeno un successo.

Media e varianza del numero di successi

L'indicatore I_j vale 1 per un successo, 0 altrimenti:

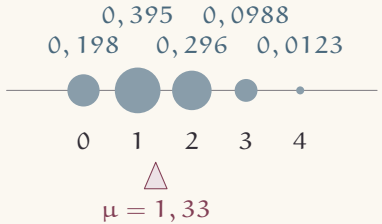
$$\mathbb{E}[I_j] = 0(1-p) + 1p = p,$$
$$\mathbb{E}[I_j^2] = 0^2(1-p) + 1^2 p = p,$$
$$\mathrm{Var}(I_j) = p - p^2 = p(1-p).$$

Poiché $K = I_1 + \cdots + I_n$, la linearità dà $\mathbb{E}[K] = np$.
Le due pagine successive ricavano
$\mathrm{Var}(K) = np(1-p)$.

Per $n = 4$, $p = 1/3$:

$$\mathbb{E}[K] = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \qquad \mathrm{Var}(K) = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9}.$$

La media come baricentro



Pesi sopra i punti; aree proporzionali

La linearità della media non richiede indipendenza; la somma delle varianze qui la utilizza.

I termini che coinvolgono due prove

Se $j \neq k$, il prodotto $I_j I_k$ vale 1 soltanto quando entrambe le prove riescono. Per indipendenza, questo evento ha probabilità $p \cdot p = p^2$.

$$\mathbb{E}[I_j I_k] = 1 \cdot p^2 + 0 \cdot (1 - p^2) = p^2.$$

Ci sono $n(n-1)$ coppie ordinate di indici distinti. Le coppie (j, k) e (k, j) contribuiscono allo stesso prodotto, quindi le coppie con $j < k$ sono $n(n-1)/2$.

Per questo i termini incrociati in $\mathbb{E}[K^2]$ danno

$$2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} p^2 = n(n-1)p^2.$$

Due prove: $I_j I_k = 1$ solo in basso a destra

	0	1
0	$(1-p)^2$	$(1-p)p$
1	$p(1-p)$	p^2

Le quattro celle derivano dai prodotti delle probabilità delle due prove.

Derivare la varianza della binomiale

Con $K = \sum_j I_j$, sviluppiamo il quadrato:

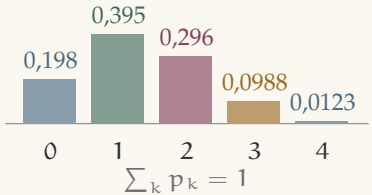
$$K^2 = \sum_j I_j^2 + 2\sum_{j<k} I_j I_k.$$

Per indipendenza, $\mathbb{E}[I_j I_k] = p^2$ se $j \neq k$. Le coppie sono $n(n-1)/2$:

$$\mathbb{E}[K^2] = np + n(n-1)p^2.$$

Sottraendo la media al quadrato:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(K) &= np + n(n-1)p^2 - n^2p^2 \\ &= np - np^2 = np(1-p). \end{aligned}$$

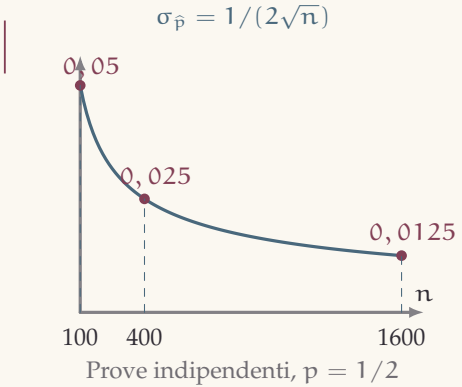


La figura riprende $n = 4$, $p = 1/3$: la varianza del conteggio è $8/9$.

Capitolo 18

Frequenze e precisione

Una probabilità è una previsione. Una frequenza è un dato che fluttua da una serie di prove all'altra.



Come cambia la varianza quando cambia la scala

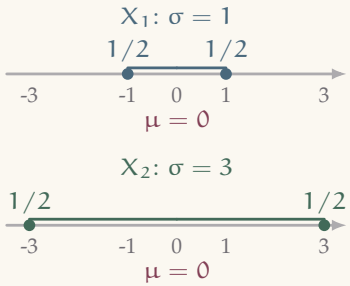
Per $Y = aX + b$ sappiamo che $\mu_Y = a\mu_X + b$. Lo scarto dal nuovo centro è

$$Y - \mu_Y = aX + b - (a\mu_X + b) = a(X - \mu_X).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(Y) &= \mathbb{E}[(Y - \mu_Y)^2] \\ &= \mathbb{E}[a^2 (X - \mu_X)^2] \\ &= a^2 \operatorname{Var}(X). \end{aligned}$$

Nel passaggio da K a K/n si ha $a = 1/n$, da cui il fattore $1/n^2$.



Traslare tutti i valori sposta la media; moltiplicare gli scarti per a moltiplica la loro media quadratica per a^2.

Dai conteggi alle frequenze

La frequenza relativa dei successi è

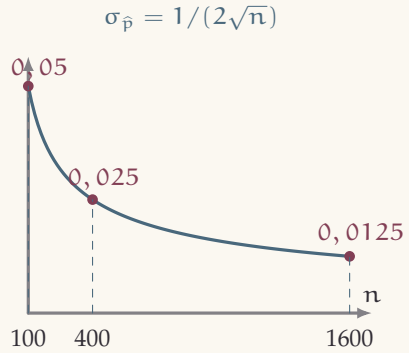
$$\widehat{p} = \frac{K}{n}.$$

Dalle proprietà della binomiale:

$$\mathbb{E}[\widehat{p}] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[K] = p,$$

$$\mathrm{Var}(\widehat{p}) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(K) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Quindi $\sigma_{\widehat{p}} = \sqrt{p(1-p)/n}$.



Queste formule assumono prove indipendenti con probabilità costante.

Esempio: 216 successi su 400 prove

Il modello prevede $p = 1/2$. Si osserva $K = 216$ su $n = 400$.

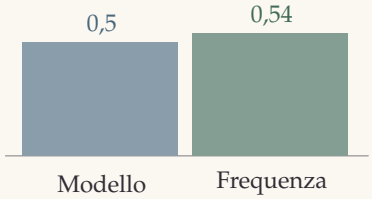
$$\widehat{p} = \frac{216}{400} = 0{,}54.$$

$$\sigma_{\widehat{p}} = \sqrt{\frac{(1/2)(1/2)}{400}} = \sqrt{\frac{1}{1600}} = 0{,}025.$$

Lo scarto, in unità della dispersione prevista, è

$$\frac{0{,}54 - 0{,}50}{0{,}025} = 1{,}6.$$

Probabilità e dato osservato



Il numero 1,6 misura lo scarto in unità tipiche; da solo non costituisce una regola universale di accettazione del modello.

Esempio: quante prove per dimezzare l'incertezza?

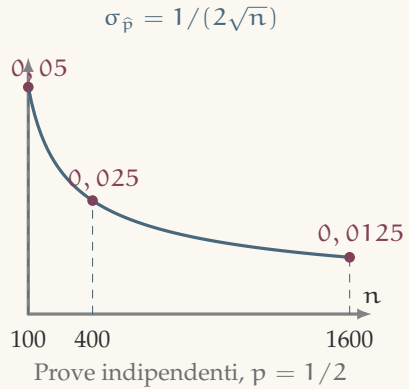
A probabilità p fissata, dimezzare $\sigma_{\hat{p}}$ richiede

$$\frac{1}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \implies \sqrt{n'} = 2\sqrt{n} \implies n' = 4n.$$

Per $p = 1/2$, $\sigma_{\hat{p}} = 1/(2\sqrt{n})$:

$$n = 100: \quad 1/(2 \cdot 10) = 0{,}05,$$
$$n = 400: \quad 1/(2 \cdot 20) = 0{,}025,$$
$$n = 1600: \quad 1/(2 \cdot 40) = 0{,}0125.$$

Occorre quadruplicare il numero di prove per dimezzare la dispersione statistica.



La riduzione riguarda le fluttuazioni statistiche; un errore sistematico non scompare aumentando le ripetizioni.

La media del prodotto di due prove indipendenti

Siano U, V due variabili indipendenti. La coppia (u, v) ha probabilità $p_U(u)p_V(v)$. Sommiamo i valori uv con questi pesi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[UV] &= \sum_u \sum_v uv\, p_U(u)p_V(v) \\ &= \left(\sum_u u p_U(u)\right)\left(\sum_v v p_V(v)\right) \\ &= \mathbb{E}[U]\mathbb{E}[V].\end{aligned}$$

La tabella dei pesi prodotto

	v_0	v_1
u_0	$a_0 b_0$	$a_0 b_1$
u_1	$a_1 b_0$	$a_1 b_1$

$$a_j = p_U(u_j), \quad b_k = p_V(v_k)$$

Se entrambe le medie sono zero, anche la media del prodotto è zero. Useremo questo risultato per gli scarti di prove indipendenti.

Media e varianza dei dati osservati

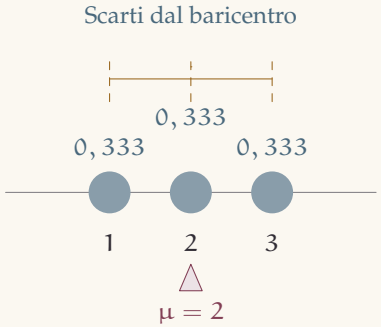
Per dati osservati $x_1, \dots, x_n$, la media e la varianza empirica sono

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_j x_j, \qquad v_n = \frac{1}{n} \sum_j (x_j - \overline{x})^2.$$

Se i dati provengono da prove indipendenti con la stessa distribuzione, possiamo stimare la varianza del modello. Per $n \geq 2$ si usa

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_j (x_j - \overline{x})^2.$$

Le pagine successive ricavano il fattore $n - 1$.



Pesi sopra i punti; aree proporzionali

Stessa distribuzione significa stessa legge delle probabilità per ogni prova. v_n descrive i dati raccolti; s^2 stima la varianza della sorgente.

Perché il centro osservato riduce gli scarti

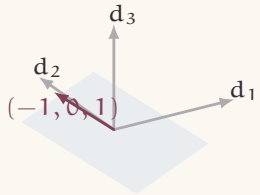
Indichiamo con X_j i valori prima di osservarli, con μ la media comune e con $\overline{X}$ la loro media. Poiché $\sum_j (X_j - \overline{X}) = 0$,

$$\sum_j (X_j - \mu)^2 = \sum_j [(X_j - \overline{X}) + (\overline{X} - \mu)]^2$$
$$= \sum_j (X_j - \overline{X})^2 + n(\overline{X} - \mu)^2.$$

Il termine misto è $2(\overline{X} - \mu) \sum_j (X_j - \overline{X}) = 0$.

Usare la media osservata sottrae quindi la quantità non negativa $n(\overline{X} - \mu)^2$.

Tre scarti, un vincolo



$d_1 + d_2 + d_3 = 0$

Due coordinate determinano la terza.

Inoltre gli scarti osservati sommano a zero: fissati i primi $n - 1$, l'ultimo è determinato.

La dispersione della media campionaria

Per $Z_j = X_j - \mu$, si ha $\overline{X} - \mu = (Z_1 + \cdots + Z_n)/n$. Il quadrato contiene i termini diagonali e quelli misti:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(\overline{X} - \mu)^2] \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\sum_j \mathbb{E}[Z_j^2] + 2\sum_{j<k} \mathbb{E}[Z_j Z_k]\right] \\
&= \frac{1}{n^2}(n\sigma^2 + 0) = \frac{\sigma^2}{n}.
\end{aligned}$$

Ogni termine diagonale vale σ^2. Per $j \neq k$, l'indipendenza dà $\mathbb{E}[Z_j Z_k] = \mathbb{E}[Z_j]\mathbb{E}[Z_k] = 0$.

n contributi diagonali: $n\sigma^2$

Termini misti: 0

Divisione per n^2: σ^2/n

Le prove sono indipendenti e hanno la stessa varianza.

La media campionaria ha la stessa media μ della sorgente: $\mathbb{E}[\overline{X}] = (n\mu)/n = \mu$.

Il fattore $n-1$ in media sulle ripetizioni

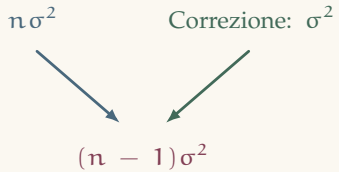
Per prove indipendenti con varianza σ^2, gli scarti centrati $Z_j = X_j - \mu$ soddisfano $\mathbb{E}[Z_j Z_k] = \mathbb{E}[Z_j]\mathbb{E}[Z_k] = 0$ per $j \neq k$.

$$\mathbb{E}[(\overline{X} - \mu)^2] = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Prendendo la media dell'identità precedente:

$$\mathbb{E}\left[\sum_j (X_j - \overline{X})^2\right] = n\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n} = (n-1)\sigma^2.$$

Pertanto $\mathbb{E}[s^2] = \sigma^2$: ripetendo l'intera raccolta dei dati, la stima è corretta in media.



Per le prove indipendenti la media del prodotto si fattorizza, come appena dimostrato. Il termine $n\sigma^2/n^2$ deriva dai soli n contributi diagonali.

Esempio: distinguere le due varianze

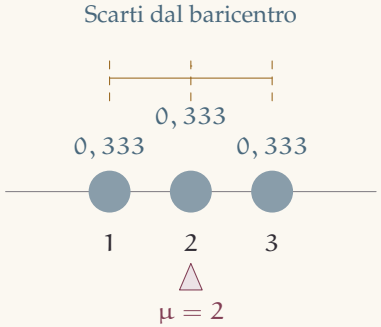
Per i dati $(1, 2, 3)$:

$$\bar{x} = \frac{1+2+3}{3} = 2.$$

Gli scarti sono $(-1, 0, 1)$; i loro quadrati sommano a 2.

$$v_3 = \frac{2}{3}, \qquad s^2 = \frac{2}{3-1} = 1.$$

I dati e il loro centro sono gli stessi: cambia la quantità che vogliamo stimare.



Pesi sopra i punti; aree proporzionali

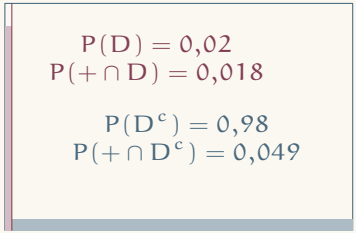
Gli scarti sono $1-2=-1, 2-2=0, 3-2=1$; i quadrati sommano a $(-1)^2+0^2+1^2=2$.

Capitolo 19

Condizionamento e Bayes

Un'informazione seleziona una parte degli esiti. Le probabilità rimaste devono essere riportate a somma uno.

Aree: probabilità congiunte



$$P(+) = 0{,}018 + 0{,}049$$

Restrizione e rinormalizzazione

Se sappiamo che si è verificato F, con $P(F) > 0$, definiamo

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Il numeratore conserva la parte compatibile con F; il denominatore rinormalizza.

Due eventi sono indipendenti quando

$$P(E \cap F) = P(E)P(F).$$

Se $P(F) > 0$, ciò equivale a $P(E \mid F) = P(E)$.

$F = \{4, 5, 6\}$



In rosso $E \cap F$; esclusi gli esiti fuori da F

Nel dado, condizionare a $F = \{4, 5, 6\}$ esclude gli esiti 1, 2 e 3; per l'evento pari restano 4 e 6.

Esempio: un dado dopo un'informazione

Siano $E = \{2, 4, 6\}$ e $F = \{4, 5, 6\}$.

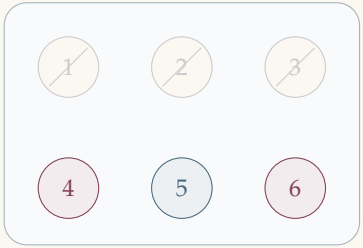
Per un dado equilibrato:

$$P(E \cap F) = \frac{2}{6}, \qquad P(F) = \frac{3}{6}.$$

$$P(E \mid F) = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}.$$

Prima dell'informazione $P(E) = 1/2$; dopo, due dei tre esiti ammessi sono pari.

$F = \{4, 5, 6\}$



In rosso $E \cap F$; esclusi gli esiti fuori da F

La normalizzazione assegna peso $1/3$ a ciascuno dei tre esiti rimasti.

Scomporre l'evento osservato

Ogni esito di F appartiene a E oppure a E^c. Le due parti sono disgiunte:

$$F = (F \cap E) \cup (F \cap E^c).$$

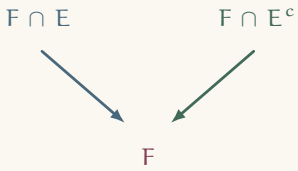
L'additività dà

$$P(F) = P(F \cap E) + P(F \cap E^c).$$

Usando la definizione di probabilità condizionata:

$$P(F) = P(F \mid E)P(E) + P(F \mid E^c)P(E^c).$$

Assumiamo qui $0 < P(E) < 1$, così entrambi i condizionamenti sono definiti.



Le due parti coprono F e non hanno esiti comuni.

La somma serve a normalizzare l'aggiornamento di Bayes.

Ricavare la formula di Bayes

Lo stesso evento congiunto può essere scritto in due modi:

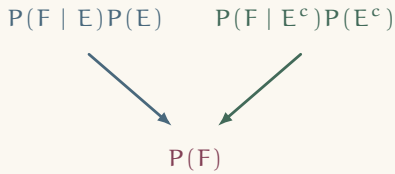
$$P(E \cap F) = P(F \mid E)P(E),$$
$$P(E \cap F) = P(E \mid F)P(F).$$

Uguagliando e dividendo per $P(F) > 0$:

$$P(E \mid F) = \frac{P(F \mid E)P(E)}{P(F)}.$$

Il denominatore si ricava dalla probabilità totale:

$$P(F) = P(F \mid E)P(E) + P(F \mid E^c)P(E^c).$$



Il numeratore di Bayes è il primo contributo.

Invertire il condizionamento richiede anche le probabilità iniziali delle ipotesi.

Esempio: un rivelatore e una condizione rara

Supponiamo

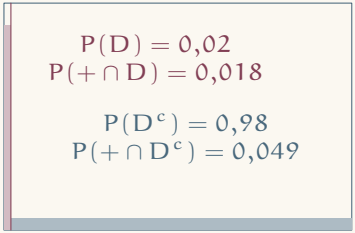
$$P(D) = 0{,}02, \qquad P(D^c) = 0{,}98,$$
$$P(+ \mid D) = 0{,}9, \quad P(+ \mid D^c) = 0{,}05.$$

I due contributi al segnale positivo sono

$$P(+ \cap D) = 0{,}9 \cdot 0{,}02 = 0{,}018,$$
$$P(+ \cap D^c) = 0{,}05 \cdot 0{,}98 = 0{,}049.$$

Quindi $P(+) = 0{,}018 + 0{,}049 = 0{,}067$.

Aree: probabilità congiunte



$P(+) = 0{,}018 + 0{,}049$

D indica che la condizione cercata è presente; + che il rivelatore emette un segnale positivo. Le aree rappresentano le probabilità assegnate.

Esempio: interpretare il segnale positivo

Dividiamo il contributo di D per tutti i segnali positivi:

$$P(D \mid +) = \frac{0{,}018}{0{,}067} = \frac{18}{67} \simeq 0{,}269.$$

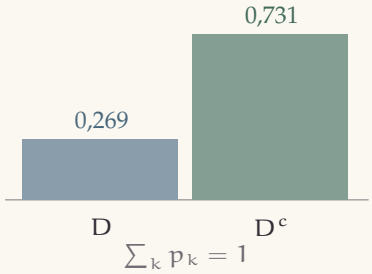
Il complemento vale

$$P(D^c \mid +) = \frac{49}{67} \simeq 0{,}731.$$

Controllo: $(18 + 49)/67 = 1$.

$P(D \mid +)$ è diverso da $P(+ \mid D) = 0{,}9$: le due domande hanno denominatori diversi.

Dopo il segnale positivo



La frequenza iniziale della condizione è essenziale per interpretare il segnale.

Capitolo 20

Distribuzioni congiunte

Le statistiche delle parti non specificano sempre come le parti sono collegate. Occorre una distribuzione sulle coppie.

	Secondo indice 0	1
0	1/5	1/10
1	3/10	2/5

Probabilità delle coppie

Una tabella sulle coppie

Per due variabili discrete:

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y).$$

Le distribuzioni marginali si ottengono sommando:

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x, y),$$

$$p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x, y).$$

La tabella somma a uno. Per indipendenza: $p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$ per ogni coppia.

	Secondo indice 0	1
0	1/5	1/10
1	3/10	2/5

Probabilità delle coppie

Una marginale conserva i dati di una variabile e somma su quelli dell'altra.

Esempio: somme per righe e colonne

La tabella è $\begin{pmatrix} 1/5 & 1/10 \\ 3/10 & 2/5 \end{pmatrix}$.

Per righe:

$$p_X(0) = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10},$$
$$p_X(1) = \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}.$$

Per colonne:

$$p_Y(0) = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}, \quad p_Y(1) = \frac{1}{10} + \frac{4}{10} = \frac{1}{2}.$$

Righe: X; colonne: Y

	0	1	
0	1/5	1/10	3/10
1	3/10	2/5	7/10
	1/2	1/2	

Somme marginali

Ciascuna marginale è normalizzata separatamente.

Esempio: verificare l'indipendenza

Confrontiamo la cella $(0,0)$ con il prodotto delle marginali:

$$p_{XY}(0,0) = \frac{1}{5} = 0{,}2,$$

$$p_X(0)p_Y(0) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}15.$$

I numeri differiscono, quindi le variabili non sono indipendenti.

La tabella indipendente avrebbe celle $0{,}15, 0{,}15, 0{,}35, 0{,}35$.

Probabilità delle coppie

	Secondo indice 0	1
0	0,15	0,15
1	0,35	0,35

Le quattro celle del modello indipendente sono $(3/10)(1/2) = 3/20$, $(3/10)(1/2) = 3/20$, $(7/10)(1/2) = 7/20$, $(7/10)(1/2) = 7/20$.

Fare una media sulla tabella delle coppie

Una funzione $g(X, Y)$ assegna un numero a ogni coppia. La sua media è

$$\mathbb{E}[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y) p_{XY}(x, y).$$

Per esempio, $g(x, y) = xy$ fornisce il prodotto dei due valori.

Nel caso indipendente, sostituendo $p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$ si ritrova la fattorizzazione già dimostrata:

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Valori di XY nelle quattro celle

	0	1
0	$0 \cdot 0$	$0 \cdot 1$
1	$1 \cdot 0$	$1 \cdot 1$

La media somma il valore di ciascuna cella moltiplicato per la sua probabilità. La figura mostra i valori di XY per variabili binarie.

Covarianza: gli scarti variano insieme?

Definiamo

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)].$$

Sviluppando il prodotto:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[XY] - \mu_X \mathbb{E}[Y] \\ &\quad - \mu_Y \mathbb{E}[X] + \mu_X \mu_Y \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mu_X \mu_Y.\end{aligned}$$

Se le variabili sono indipendenti, $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ e la covarianza è nulla.



Scarti concordi danno un prodotto positivo; scarti discordi uno negativo. La covarianza è la media pesata di questi prodotti.

Esempio: calcolare la covarianza

Per le variabili binarie della tabella, XY vale 1 soltanto nella cella $(1,1)$:

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Le medie sono

$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}7 = 0{,}7,$$
$$\mathbb{E}[Y] = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5.$$

Quindi $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0{,}4 - 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}05$.

	Secondo indice 0	1
0	1/5	1/10
1	3/10	2/5

Probabilità delle coppie

La somma completa è $\mathbb{E}[XY] = 0 \cdot 0 \cdot (1/5) + 0 \cdot 1 \cdot (1/10) + 1 \cdot 0 \cdot (3/10) + 1 \cdot 1 \cdot (2/5) = 2/5$.

Esempio: stesse marginali, legami diversi

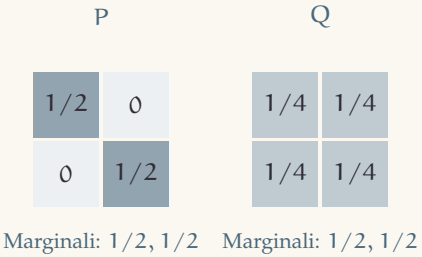
Confrontiamo due tabelle:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Le somme per riga e colonna sono $1/2$ in entrambe.

Per P, gli esiti sono sempre uguali: $P(X = Y) = 1$.

Per Q, $P(X = Y) = 1/4 + 1/4 = 1/2$.



Stesse somme, celle diverse

Per P, righe e colonne sommano $1/2 + 0 = 0 + 1/2 = 1/2$; per Q, ciascuna somma vale $1/4 + 1/4 = 1/2$.

Esempio: covarianza nulla ma dipendenza

Sia $X = -1, 0, 1$ con probabilità $1/3$, e sia $Y = X^2$.

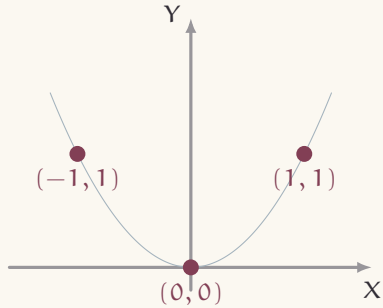
$$\mathbb{E}[X] = \frac{-1+0+1}{3} = 0,$$

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^3] = \frac{-1+0+1}{3} = 0.$$

Inoltre $\mathbb{E}[Y] = (1+0+1)/3 = 2/3$, quindi $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0 - 0 \cdot (2/3) = 0$.

Eppure $P(Y = 0 \mid X = 0) = 1$, mentre $P(Y = 0) = 1/3$: c'è dipendenza.

Dipendenza senza covarianza



$Y = X^2$, tre punti equiprobabili

La relazione è curva: una covarianza nulla può nascondere una dipendenza deterministica.

Dalle coppie di esiti ai tempi registrati

Per ogni fotone rivelato registriamo lo scarto t da un riferimento temporale comune; $t < 0$ indica un evento precedente.

Raggrupperemo i tempi in intervalli, per collegare conteggi e densità. Il confronto fra due profili richiederà poi ampiezze normalizzate e il loro prodotto interno.

L'esempio usa dati didattici assegnati per 16 rivelazioni della stessa preparazione.

Un punto per ogni rivelazione; l'altezza separa soltanto i simboli.



Conteggi nei cinque intervalli:
1, 2, 4, 6, 3.

Il continuo estende le somme già utilizzate; il modello distingue i tempi osservati dalle probabilità previste.

Dai conteggi ai tempi di rivelazione

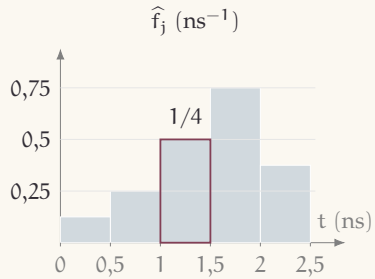
I cinque intervalli hanno larghezza $\Delta t = 0{,}5\,\text{ns}$. I conteggi sono $(1, 2, 4, 6, 3)$ e sommano a $N = 16$.

$$\widehat{p}_j = \frac{n_j}{N}, \qquad \widehat{f}_j = \frac{\widehat{p}_j}{\Delta t}.$$

Nel terzo intervallo, $n_3 = 4$:

$$\widehat{p}_3 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}, \qquad \widehat{f}_3 = \frac{1/4}{0{,}5\,\text{ns}} = 0{,}5\,\text{ns}^{-1}.$$

L'area è $0{,}5\,\text{ns} \cdot 0{,}5\,\text{ns}^{-1} = 1/4$.



Ogni barra ha larghezza 0,5 ns; la sua area è una frequenza relativa.

Il simbolo con il cappello indica una quantità ricavata dai dati. La probabilità del modello verrà indicata con p_j.

Normalizzare tutte le barre osservate

Dividendo ogni conteggio per 16 otteniamo

$$\widehat{p} = \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}\right).$$

Poiché $\Delta t = 0{,}5\,\mathrm{ns}$, ogni altezza è $n_j/(8\,\mathrm{ns})$. La somma delle aree vale

$$\sum_j \widehat{f}_j \Delta t = \frac{1+2+4+6+3}{16} = \frac{16}{16} = 1.$$

La tabella conserva l'ordine temporale degli intervalli.

n_j	$\widehat{p}_j$	$\widehat{f}_j$ (ns^{-1})
1	$\frac{1}{16}$	0,125
2	$\frac{1}{8}$	0,25
4	$\frac{1}{4}$	0,5
6	$\frac{3}{8}$	0,75
3	$\frac{3}{16}$	0,375

Le altezze hanno unità di inverso del tempo; le aree rappresentano frequenze relative senza dimensioni.

Una somma su intervalli sempre più piccoli

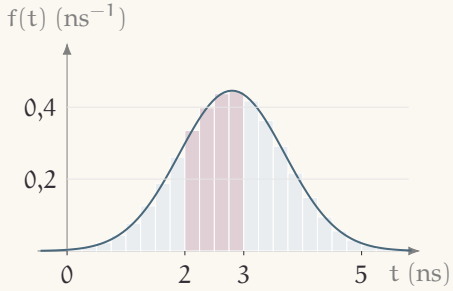
Una densità $f(t) \geq 0$ assegna a un intervallo una probabilità pari alla sua area. Partizionando $[a, b]$ in rettangoli:

$$P(a \leq t \leq b) \simeq \sum_j f(t_j)\Delta t.$$

Nel limite di intervalli piccoli,

$$P(a \leq t \leq b) = \int_a^b f(t)\,dt,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1.$$



In rosso: intervallo $[2, 3]$ ns. Il profilo normalizzato continua oltre la finestra mostrata.

Profilo: $f(t) = e^{-(t-2{,}8)^2/1{,}6}/\sqrt{1{,}6\pi}$, con tempi in ns e densità in ns^{-1}. Ricaveremo la normalizzazione nelle prossime pagine.

Confrontare un modello e un campione

Consideriamo, come esempio, un modello uniforme su $[0, 2{,}5]$ ns:

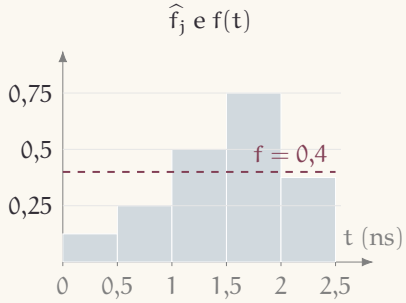
$$f(t) = \frac{1}{2{,}5\,\text{ns}} = 0{,}4\,\text{ns}^{-1}.$$

Per ogni intervallo di larghezza 0,5 ns,

$$p_j = \int_{I_j} f(t)\,dt = 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2.$$

Nel campione il terzo intervallo ha invece $\widehat{p}_3 = 1/4 = 0{,}25$. Su nuove acquisizioni i conteggi cambiano; sotto questo modello,

$$\mathbb{E}[\widehat{p}_j] = p_j = 0{,}2.$$



Linea: modello uniforme.
Barre: dati delle 16 rivelazioni.

La curva appartiene al modello; le barre descrivono una particolare acquisizione. La loro differenza va valutata con le fluttuazioni previste.

Altezza della densità e probabilità di un intervallo

Se il tempo è uniforme su $[0, 0{,}5]$ ns, la densità in quell'intervallo è $2\,\mathrm{ns}^{-1}$. La normalizzazione usa l'area:

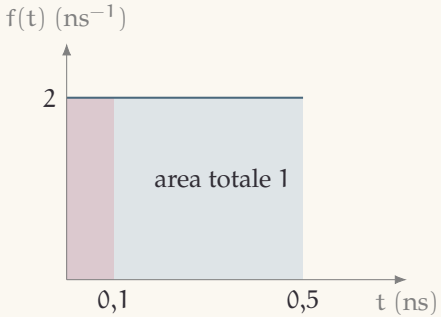
$$\int_0^{0{,}5\ \mathrm{ns}} 2\,\mathrm{ns}^{-1}\,dt = 1.$$

Per i primi $0{,}1$ ns,

$$P(0 \le t \le 0{,}1\,\mathrm{ns}) = 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}2.$$

Un singolo punto ha intervallo di larghezza nulla:

$$P(t = t_0) = \int_{t_0}^{t_0} f(t)\,dt = 0.$$



La fascia rossa ha area $2 \cdot 0{,}1 = 0{,}2$.

Una densità può avere valore numerico maggiore di uno. Il rivelatore, con risoluzione finita, assegna invece gli eventi a intervalli temporali.

La pendenza come rapporto incrementale

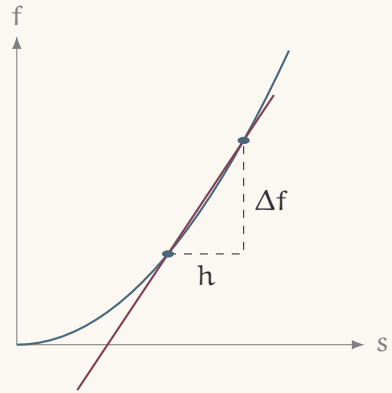
Per una funzione $f(s)$, i punti con ascisse s e $s+h$ determinano una retta secante, la cui pendenza è

$$\frac{\Delta f}{\Delta s} = \frac{f(s+h) - f(s)}{h}, \qquad h \neq 0.$$

Se questo rapporto converge quando $h \to 0$, il suo limite definisce la derivata:

$$f'(s) = \lim_{h \to 0} \frac{f(s+h) - f(s)}{h}.$$

La tangente descrive la variazione locale.
Calcoleremo il limite per $f(s) = s^2$.



La secante usa due punti distinti; la derivata descrive il limite della sua pendenza.

Calcolare la derivata del quadrato

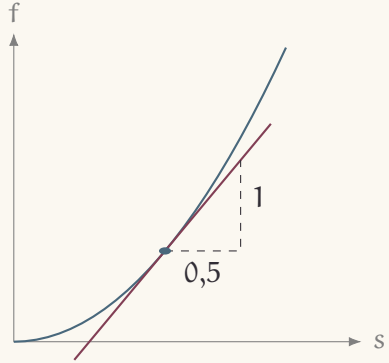
Per $f(s) = s^2$ e $h \neq 0$, sviluppiamo il numeratore del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned}\frac{f(s+h)-f(s)}{h} &= \frac{(s+h)^2 - s^2}{h} \\ &= \frac{s^2 + 2sh + h^2 - s^2}{h} \\ &= \frac{h(2s+h)}{h} = 2s + h.\end{aligned}$$

Passando al limite $h \to 0$:

$$f'(s) = \lim_{h \to 0} (2s + h) = 2s.$$

In particolare, a $s = 1$ la pendenza vale 2.



Ogni pendenza locale si ricava dopo aver semplificato il rapporto per h diverso da zero.

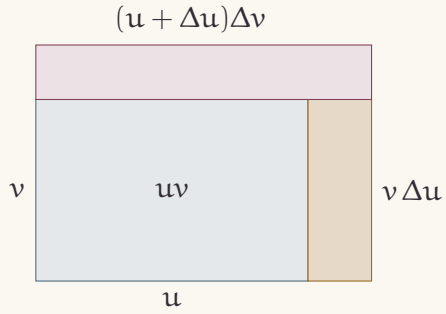
L'incremento del prodotto

Scriviamo $u = u(s)$, $v = v(s)$, $\Delta u = u(s+h) - u(s)$ e $\Delta v = v(s+h) - v(s)$. L'incremento del prodotto è

$$\begin{aligned}\Delta(uv) &= (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv \\ &= uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v - uv \\ &= u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v.\end{aligned}$$

Per $h \neq 0$ dividiamo ciascun addendo:

$$\frac{\Delta(uv)}{h} = u\frac{\Delta v}{h} + v\frac{\Delta u}{h} + \Delta u\frac{\Delta v}{h}.$$



La figura mostra il rettangolo iniziale e le aree che si aggiungono quando i due fattori aumentano.

Il limite dell'incremento del prodotto

Se u, v sono derivabili, $\Delta u/h \to u'(s)$ e $\Delta v/h \to v'(s)$. Inoltre $\Delta u \to 0$. Nella formula

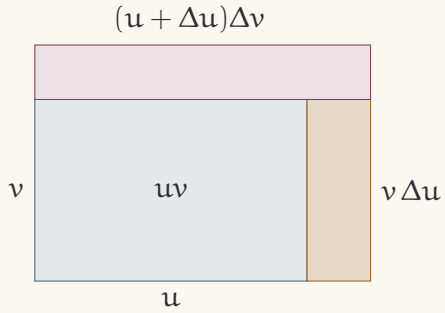
$$\frac{\Delta(uv)}{h} = u\frac{\Delta v}{h} + v\frac{\Delta u}{h} + \Delta u\frac{\Delta v}{h}$$

il limite del terzo termine vale $0 \cdot v' = 0$. Rimane

$$(uv)' = uv' + vu'.$$

Per $u = v = s$, con $u\prime = v\prime = 1$:

$$(s^2)' = s \cdot 1 + s \cdot 1 = 2s.$$



Il prodotto degli incrementi scompare nel limite del rapporto incrementale.

La derivata di una funzione composta

Poniamo $q = q(s)$ e consideriamo $F(s) = e^{q(s)}$. La regola della funzione composta, ottenuta separando i due rapporti incrementali, dà

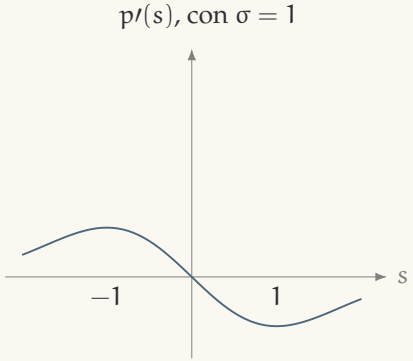
$$\frac{\Delta F}{\Delta s} = \frac{\Delta F}{\Delta q}\frac{\Delta q}{\Delta s} \quad \Longrightarrow \quad F'(s) = e^{q(s)} q'(s).$$

Per $q(s) = -s^2/(2\sigma^2)$, con $\sigma > 0$ costante,

$$q'(s) = -\frac{2s}{2\sigma^2} = -\frac{s}{\sigma^2}.$$

Pertanto, se $p(s) = C_\sigma e^{-s^2/(2\sigma^2)}$,

$$p'(s) = -\frac{s}{\sigma^2} p(s).$$



Il prodotto dei rapporti vale per $\Delta q \neq 0$. Per $\Delta q = 0$, si estende il primo fattore per continuità, con valore $e^{q(s)}$.

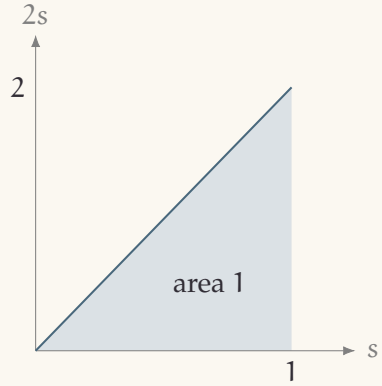
Dagli incrementi di una primitiva all'area

Sia F derivabile con derivata continua f su $[a, b]$. Suddividiamo l'intervallo con $a = s_0 < \cdots < s_n = b$. Il teorema di Lagrange assegna a ogni tratto un punto $\xi_j \in (s_j, s_{j+1})$ per cui

$$F(s_{j+1}) - F(s_j) = F'(\xi_j)(s_{j+1} - s_j).$$

Sommando e ponendo $\Delta s_j = s_{j+1} - s_j$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta s_j = F(b) - F(a).$$



La somma cancella i valori interni di F. La figura anticipa il caso $F(s) = s^2$.

Il limite delle somme dà l'integrale

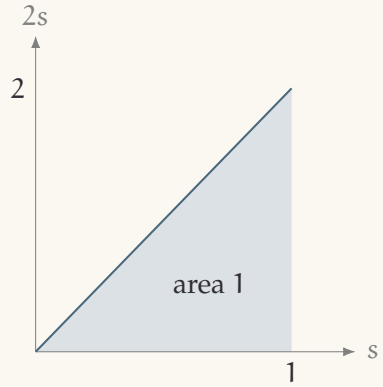
Per f continua, le somme di Riemann convergono all'integrale quando il massimo degli intervalli Δs_j tende a zero. Dall'uguaglianza precedente segue

$$\int_a^b f(s)\,ds = F(b) - F(a) = [F(s)]_a^b.$$

Per $F(s) = s^2$ si ha $f(s) = 2s$; quindi

$$\int_0^1 2s\,ds = [s^2]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1.$$

La figura verifica il risultato: il triangolo ha base 1, altezza 2 e area $1 \cdot 2/2 = 1$.



La primitiva determina l'integrale mediante i suoi valori agli estremi.

Ricavare l'integrazione per parti

Integriamo la regola del prodotto fra a e b:

$$\int_a^b (uv)'\,ds = \int_a^b u'v\,ds + \int_a^b uv'\,ds.$$

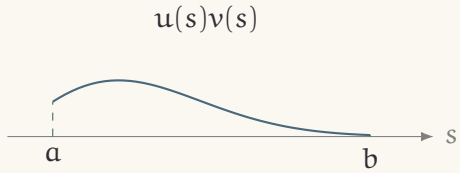
Il membro sinistro è $[uv]_a^b$. Portando il primo integrale al membro sinistro:

$$\int_a^b uv'\,ds = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\,ds.$$

Il termine al bordo contiene entrambi gli estremi:

$$[uv]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

Per un dominio infinito si calcolano i limiti dei termini al bordo.



L'identità trasferisce la derivata da un fattore all'altro e conserva il contributo degli estremi.

La derivata cubica determina la primitiva quadratica

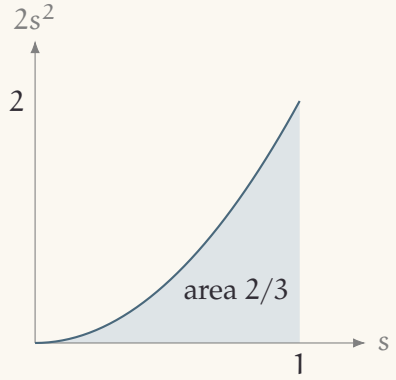
Per $h \neq 0$, il rapporto incrementale è

$$\frac{(s+h)^3 - s^3}{h} = \frac{s^3 + 3s^2h + 3sh^2 + h^3 - s^3}{h} = 3s^2 + 3sh + h^2.$$

Facendo $h \to 0$ otteniamo $(s^3)' = 3s^2$. Per linearità,

$$\left(\frac{s^3}{3}\right)' = s^2, \qquad \left(\frac{2s^3}{3}\right)' = 2s^2.$$

Queste identità forniscono le primitive del prossimo esempio.



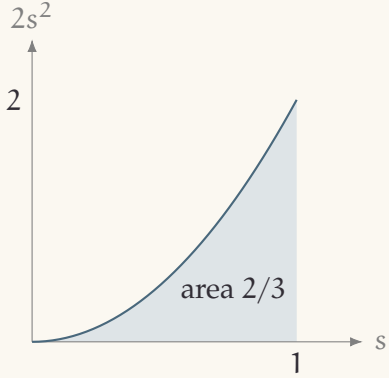
La figura anticipa l'area sotto $2s^2$ fra zero e uno, che sarà calcolata nella pagina successiva.

Un esempio completo di integrazione per parti

Calcoliamo $\int_0^1 s(2s)\,ds$, scegliendo $u = s$, $u' = 1$, $v' = 2s$, $v = s^2$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 s(2s)\,ds &= [s \cdot s^2]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot s^2\,ds \\ &= (1^3 - 0^3) - \left[\frac{s^3}{3}\right]_0^1 \\ &= 1 - \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Controllo diretto: la derivata di $2s^3/3$ è $2s^2$, quindi l'integrale vale $[2s^3/3]_0^1 = 2/3$.



La scelta dei due fattori e il termine al bordo sono parte del calcolo, anche quando uno degli estremi vale zero.

La normalizzazione richiede un'area finita

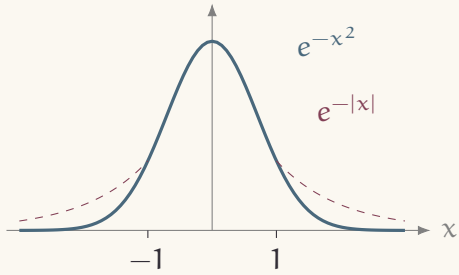
Per calcolare la costante gaussiana partiamo da

$$I_L = \int_{-L}^{L} e^{-x^2}\,dx, \qquad I = \lim_{L\to\infty} I_L.$$

Gli I_L crescono perché l'integrando è positivo. Per $|x| \geq 1$ vale $x^2 \geq |x|$, quindi $e^{-x^2} \leq e^{-|x|}$. Inoltre $e^{-x^2} \leq 1$ su $[-1, 1]$. Pertanto

$$I_L \leq 2 + 2\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx = 2 + 2/e.$$

Una successione crescente e limitata converge: l'area I esiste ed è positiva e finita.



La curva rossa limita le code per $|x| \geq 1$.

Il controllo delle code giustifica gli integrali impropri che useremo per la densità e le ampiezze gaussiane.

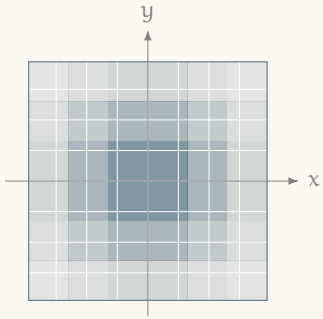
Il quadrato dell'integrale diventa un'area pesata

Dividiamo $[-L, L]$ in intervalli di larghezza $h = 2L/n$, con punti x_j e y_k. Il prodotto di due somme è

$$\Big(\sum_j e^{-x_j^2} h\Big)\Big(\sum_k e^{-y_k^2} h\Big) = \sum_{j,k} e^{-(x_j^2+y_k^2)} h^2.$$

Ogni termine pesa una cella di area h^2. Sul quadrato $Q_L = [-L, L]^2$, il limite è:

$$I_L^2 = \iint_{Q_L} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$



Ogni cella contribuisce $e^{-(x_j^2+y_k^2)} h^2$.

Per una funzione continua su un quadrato, la costruzione mediante celle coincide con il prodotto dei due integrali separati.

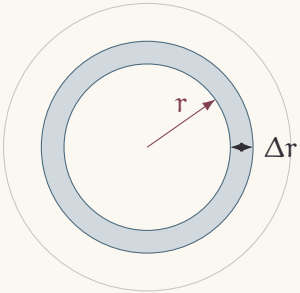
Sommare le corone concentriche del disco

Sul disco B_R, il peso dipende solo dal raggio $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ed è e^{-r^2}. La corona da r a $r + \Delta r$ ha area

$$\begin{aligned} \Delta A &= \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2 \\ &= 2\pi r \Delta r + \pi(\Delta r)^2. \end{aligned}$$

Suddividendo $[0, R]$, la somma dei termini quadratici è al più $\pi R \max \Delta r$, che tende a zero. Per continuità del peso,

$$\iint_{B_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^R e^{-r^2} 2\pi r\,dr.$$



Corona circolare
$\Delta A = 2\pi r \Delta r + \pi(\Delta r)^2$.

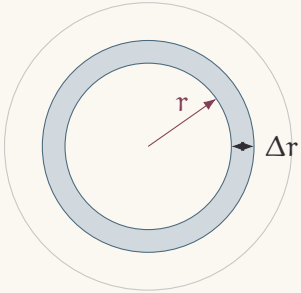
L'elemento di area radiale $2\pi r\,dr$ deriva dall'area della corona, senza assumere una formula di cambio di coordinate.

Valutare esplicitamente l'integrale sul disco

Poniamo $u = r^2$, $du = 2r\,dr$. Gli estremi $r = 0, R$ diventano $u = 0, R^2$:

$$\begin{aligned} D_R &= \int_0^R e^{-r^2} 2\pi r\,dr \\ &= \pi \int_0^{R^2} e^{-u}\,du \\ &= \pi[-e^{-u}]_0^{R^2} \\ &= \pi(-e^{-R^2} + e^0) \\ &= \pi(1 - e^{-R^2}). \end{aligned}$$

Per $R \to \infty$, $e^{-R^2} \to 0$ e $D_R \to \pi$.



Corona circolare
$\Delta A = 2\pi r \Delta r + \pi(\Delta r)^2$.

La sostituzione riduce l'area pesata a una primitiva elementare, verificabile derivando $-e^{-u}$.

Confrontare il quadrato con i due dischi

Il disco di raggio L è contenuto nel quadrato $[-L, L]^2$, che è contenuto nel disco di raggio $\sqrt{2}L$. Il peso è positivo, quindi

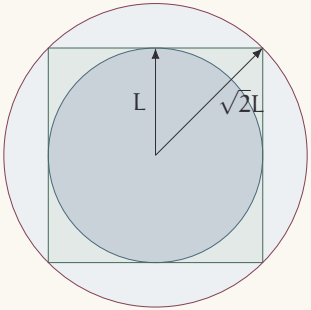
$$D_L \leq I_L^2 \leq D_{\sqrt{2}L}.$$

Usando il valore calcolato sul disco:

$$\pi(1 - e^{-L^2}) \leq I_L^2 \leq \pi(1 - e^{-2L^2}).$$

Entrambi gli estremi tendono a π. Per confronto $I^2 = \pi$; essendo $I > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$



$B_L \subseteq Q_L \subseteq B_{\sqrt{2}L}$
Stesso peso positivo in ogni regione.

Il confronto controlla il passaggio al dominio illimitato e fissa il segno positivo della radice.

Ricavare la costante della densità

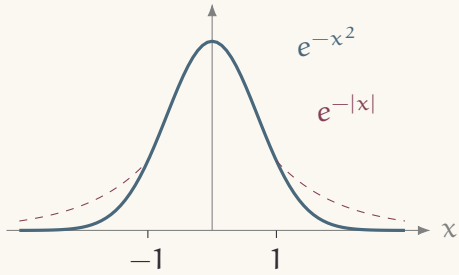
Sia $\sigma > 0$. Poniamo $x = s/(\sqrt{2}\sigma)$, quindi $ds = \sqrt{2}\sigma\, dx$. Gli estremi restano infiniti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/(2\sigma^2)}\, ds = \sqrt{2}\sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$
$$= \sqrt{2}\sigma\sqrt{\pi} = \sigma\sqrt{2\pi}.$$

La condizione di normalizzazione impone

$$C_\sigma \sigma\sqrt{2\pi} = 1, \qquad C_\sigma = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

La densità centrata è dunque $p_0(s) = e^{-s^2/(2\sigma^2)}/(\sigma\sqrt{2\pi})$.



La curva rossa limita le code per $|x| \geq 1$.

La costante dipende dalla larghezza del profilo; quando s è un tempo, $C\sigma$ ha unità di inverso del tempo.

Esempio: normalizzare il profilo di larghezza 1/2

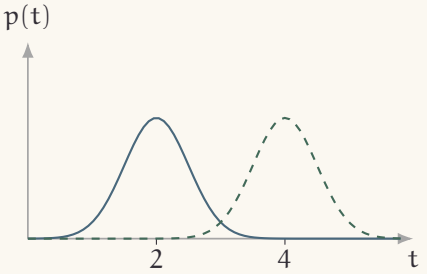
Misuriamo i tempi nell'unità scelta e poniamo $\sigma = 1/2$. Allora $2\sigma^2 = 2(1/4) = 1/2$ e

$$C_{1/2} = \frac{1}{(1/2)\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \simeq 0{,}7979.$$

Pertanto $p_0(s) = \sqrt{2/\pi}\, e^{-2s^2}$. Il controllo usa l'integrale appena ricavato:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_0(s)\,ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = 1.$$

Scelto $g_0 = \sqrt{p_0} \geq 0$, si ha $\int |g_0(s)|^2 ds = \int p_0(s)\,ds = 1$.



Due traslazioni del profilo con $\sigma = 1/2$ e altezza massima 0,7979.

La successiva traslazione dei centri conserverà questa area e permetterà di confrontare le ampiezze temporali.

Traslare una densità gaussiana

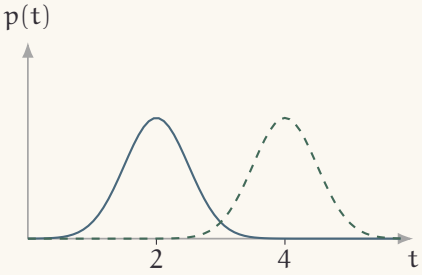
Usiamo $\sigma > 0$ e la costante $C_\sigma = 1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ appena ricavata:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_\sigma e^{-s^2/(2\sigma^2)}\, ds = 1.$$

Poniamo $p_\mu(t) = C_\sigma e^{-(t-\mu)^2/(2\sigma^2)}$. Con $s = t - \mu$ si ha $ds = dt$ e gli estremi restano $-\infty, +\infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\mu(t)\, dt = C_\sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/(2\sigma^2)}\, ds = 1.$$

La traslazione modifica il centro e conserva l'area.



Densità con centri 2 e 4 e $\sigma = 1/2$.

La costante ricavata resta la stessa per ogni centro; la sua cancellazione semplificherà la sovrapposizione.

La densità centrata ha media nulla

La densità $p(s) = C_\sigma e^{-s^2/(2\sigma^2)}$ è pari, poiché $(-s)^2 = s^2$. Pertanto

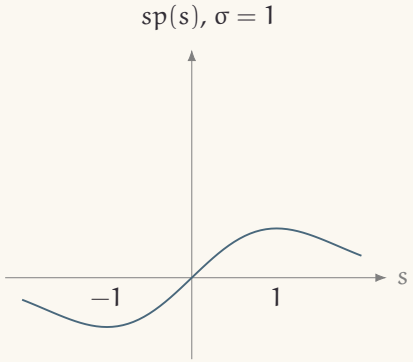
$$(-s)p(-s) = -sp(s).$$

I contributi di $sp(s)$ a sinistra e a destra dell'origine si cancellano:

$$\int_{-L}^{L} sp(s)\,ds = 0.$$

Il decadimento gaussiano assicura la convergenza; facendo tendere L all'infinito:

$$\int_{-\infty}^{\infty} sp(s)\,ds = 0.$$



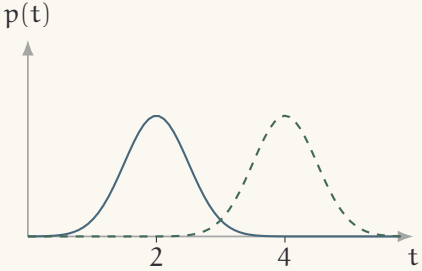
La simmetria annulla la media centrata; il calcolo successivo riporta il risultato alla variabile t.

La traslazione determina la media

Per $p_\mu(t) = C_\sigma e^{-(t-\mu)^2/(2\sigma^2)}$, poniamo $s = t - \mu$, quindi $t = s + \mu$ e $dt = ds$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[t] &= \int_{-\infty}^{\infty} t p_\mu(t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (s+\mu) p(s)\, ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s p(s)\, ds + \mu \int_{-\infty}^{\infty} p(s)\, ds \\ &= 0 + \mu \cdot 1 = \mu.\end{aligned}$$

La varianza è la media del quadrato dello scarto $s = t - \mu$.



Medie 2 e 4; $\sigma = 1/2$.

Il primo integrale è nullo per simmetria; il secondo vale uno per normalizzazione.

Calcolare la varianza gaussiana

Per la densità centrata $p(s)$ abbiamo $p'(s) = -sp(s)/\sigma^2$, dunque $s^2 p(s) = -\sigma^2 s p'(s)$. Poniamo

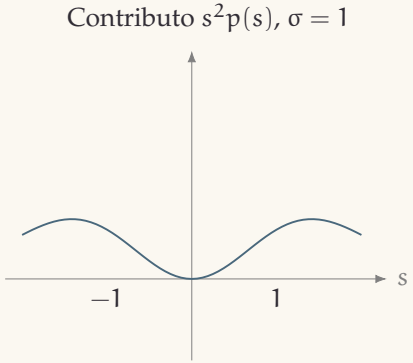
$$J = \int_{-\infty}^{\infty} s p'(s)\, ds.$$

Con $u = s$, $u' = 1$, $v' = p'$, $v = p$, per parti:

$$J = [sp(s)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} p(s)\, ds = 0 - 1 = -1.$$

La varianza è quindi

$$\mathrm{Var}(t) = -\sigma^2 J = -\sigma^2(-1) = \sigma^2.$$



Poiché σ è positivo, la deviazione standard è σ. Il termine al bordo si annulla per il decadimento gaussiano.

Due intervalli: probabilità uguali e ampiezze diverse

Consideriamo un modello su due intervalli, nel quale l'esito j ha probabilità $|u_j|^2$. Le due preparazioni hanno ampiezze

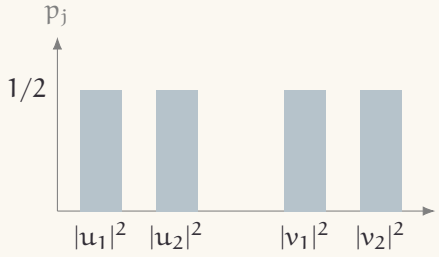
$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Per entrambe, ciascun modulo quadrato vale $1/2$:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}, \qquad \left|\frac{-1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}.$$

La somma $1/2 + 1/2 = 1$ normalizza entrambi i vettori.

Stesse probabilità nei due intervalli



Le probabilità nei singoli intervalli coincidono; il secondo coefficiente ha una fase relativa diversa.

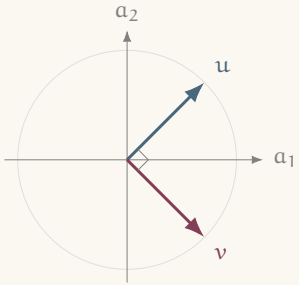
Il prodotto interno conserva l'informazione di fase

I coefficienti sono reali, quindi la coniugazione li lascia invariati. Sviluppiamo entrambi i prodotti:

$$\langle u, u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = 1,$$

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Scegliere le radici positive delle probabilità seleziona u; le stesse probabilità ammettono anche v.



Piano delle due ampiezze reali. I vettori normalizzati sono ortogonali.

La sovrapposizione confronta le ampiezze. La probabilità di un esito si calcola dopo avere specificato anche come si misura.

Confrontare ampiezze associate agli stessi tempi

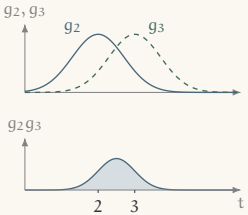
Nel modello scelto le ampiezze temporali sono reali positive e hanno fasi interne uguali. La densità è il loro quadrato; la sovrapposizione confronta le ampiezze allo stesso tempo e somma i contributi.

$$g_\mu(t) = \sqrt{p_\mu(t)} = \sqrt{C_\sigma}\, e^{-(t-\mu)^2/(4\sigma^2)}.$$

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\mu_1}(t) g_{\mu_2}(t)\, dt.$$

È l'analogo continuo di

$$\langle u, v \rangle = \sum_j u_j^* v_j.$$



Centri 2, 3, $\sigma = 1/2$.
L'area del prodotto è γ.

L'uguaglianza delle fasi interne è un'ipotesi del modello. Due densità uguali, da sole, non fissano tutte le ampiezze complesse.

Riunire i due esponenti

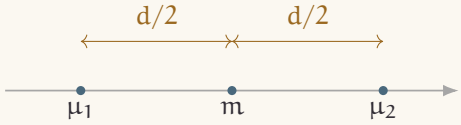
Poniamo $m = (\mu_1 + \mu_2)/2$ e $d = \mu_2 - \mu_1$. I centri sono quindi $m - d/2$ e $m + d/2$. Espandendo i quadrati, i termini lineari in $t - m$ si cancellano.

$$(t-\mu_1)^2 = (t-m)^2 + d(t-m) + d^2/4,$$
$$(t-\mu_2)^2 = (t-m)^2 - d(t-m) + d^2/4.$$

La somma vale $2(t-m)^2 + d^2/2$.

Dividendo per $4\sigma^2$:

$$\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2} + \frac{d^2}{8\sigma^2}.$$



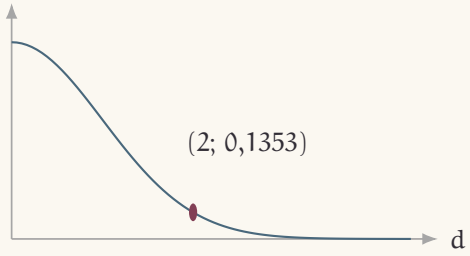
La nuova gaussiana è centrata nel punto medio.

Il completamento del quadrato separa una funzione del tempo da un fattore che dipende soltanto dalla distanza fra i centri.

La normalizzazione completa il calcolo

Inseriamo la somma dei quadrati nell'integrale. Il fattore che dipende da d è costante rispetto al tempo; ciò che rimane è una densità gaussiana normalizzata, traslata nel centro m.

$$\begin{aligned}\gamma &= C_\sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-m)^2/(2\sigma^2)} e^{-d^2/(8\sigma^2)}\,dt \\ &= e^{-d^2/(8\sigma^2)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p_m(t)\,dt}_{1} \\ &= e^{-d^2/(8\sigma^2)}.\end{aligned}$$



Per $d = 2$, $\sigma = 1/2$:

$$8\sigma^2 = 2, \quad d^2 = 4, \quad \gamma = e^{-2} \simeq 0{,}1353.$$

Per $d = 0$ si ottiene $\gamma = 1$. Abbiamo ricavato la relazione impiegata nell'approfondimento fotonico del primo modulo.

Approfondimento fisico: dai pesi ai conteggi

Riprendiamo il modello della sorgente fotonica. In ogni impulso si produce una coppia con probabilità 0,02; le efficienze dei due rivelatori sono 0,8 e 0,5. Condizionatamente alla coppia rilevata, l'esito $++$ ha probabilità $3/8$.

Assumiamo perdite indipendenti e nessun fondo:

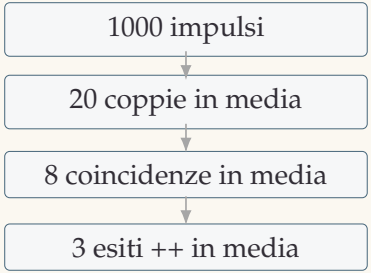
$$p_{++} = 0{,}02 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot \frac{3}{8} = 0{,}003.$$

Per $N = 1000$ impulsi indipendenti:

$$E[N_{++}] = Np_{++} = 3,$$

$$\mathrm{Var}(N_{++}) = Np_{++}(1 - p_{++}) = 2{,}991.$$

$$\sigma_{N_{++}} \simeq 1{,}73.$$



Torna alle distribuzioni Prosegui. La media 3 non impone tre eventi in ciascuna acquisizione.

Svolgere i prodotti del modello di rivelazione

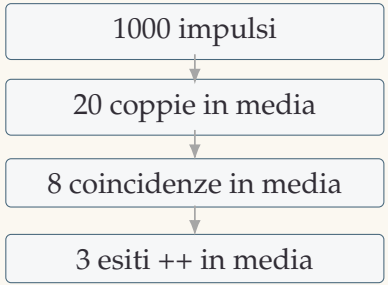
I fattori successivi della probabilità sono

$$0{,}02 \cdot 0{,}8 = 0{,}016, \quad 0{,}016 \cdot 0{,}5 = 0{,}008,$$
$$0{,}008 \cdot \frac{3}{8} = \frac{0{,}024}{8} = 0{,}003.$$

Con $N = 1000$ impulsi indipendenti, il conteggio è binomiale:

$$\mathbb{E}[N_{++}] = 1000 \cdot 0{,}003 = 3,$$
$$\mathrm{Var}(N_{++}) = 3(1 - 0{,}003) = 3 \cdot 0{,}997 = 2{,}991,$$
$$\sigma_{N_{++}} = \sqrt{2{,}991} \simeq 1{,}729.$$

La deviazione standard descrive la dispersione fra acquisizioni ripetute.



Produzione, doppia rivelazione e scelta dell'esito sono eventi condizionati successivi del modello.

Una media di tre ammette acquisizioni senza eventi

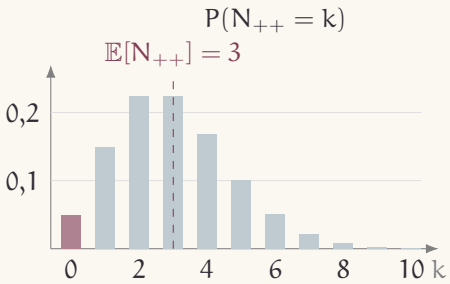
Nel modello precedente $N_{++} \sim \mathrm{Bin}(1000, 0{,}003)$. Per zero eventi, il coefficiente binomiale e il fattore di successo valgono uno:

$$\binom{1000}{0} = \frac{1000!}{0!1000!} = 1, \qquad (0{,}003)^0 = 1.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} P(N_{++} = 0) &= 1 \cdot 1 \cdot (1 - 0{,}003)^{1000} \\ &= 0{,}997^{1000} \simeq 0{,}04956. \end{aligned}$$

Circa il 4,96% delle acquisizioni di 1000 impulsi ha quindi conteggio nullo, sotto queste ipotesi.



Primi undici conteggi; $P(N_{++} > 10) \simeq 0{,}000284$.

La percentuale è una previsione su acquisizioni ripetute della stessa preparazione, con perdite indipendenti e nessun fondo.

Calcolare la probabilità di osservare proprio tre eventi

Per tre successi su 1000 prove,

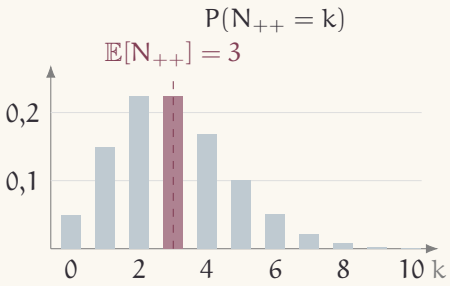
$$\binom{1000}{3} = \frac{1000 \cdot 999 \cdot 998}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 166\,167\,000.$$

I fattori restanti sono

$$(0{,}003)^3 = \frac{27}{10^9}, \qquad 0{,}997^{997} \simeq 0{,}05001184.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{N}_{++} = 3) &= 166\,167\,000 \frac{27}{10^9}\, 0{,}997^{997} \\ &\simeq 4{,}486509 \cdot 0{,}05001184 \\ &\simeq 0{,}22438. \end{aligned}$$



Primi undici conteggi;
$\mathrm{P}(\mathrm{N}_{++} > 10) \simeq 0{,}000284.$

Il valore medio è tre; osservare esattamente tre eventi ha probabilità circa 22,44%. Le altre acquisizioni producono altri conteggi.

La probabilità collega algebra e misura

Una distribuzione assegna probabilità agli esiti; le frequenze descrivono un'acquisizione e variano fra ripetizioni.

Le ampiezze richiedono anche l'informazione di fase. Il loro prodotto interno confronta preparazioni che possono avere le stesse probabilità in una particolare misura.

La parte successiva assocerà alle preparazioni vettori e alle misure operatori, per ricavare i pesi degli esiti.

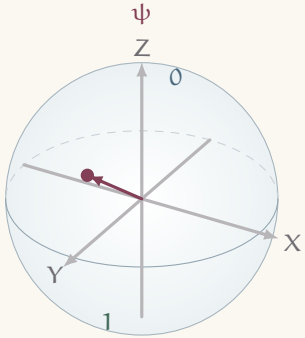


La notazione di Dirac renderà leggibile questo collegamento senza cambiare l'algebra già costruita.

Parte 3

III · Stati e misura

Vettori e probabilità ora descrivono lo stesso esperimento: preparare uno stato, trasformarlo e misurare un'osservabile.



Sfera di Bloch: stati puri

Le sezioni della parte 3

21 Dal vettore al ket

22 Bra e prodotto interno

23 Prodotto diadico e proiettori

24 Operatori e trasformazioni del qubit

25 Autostati e decomposizione spettrale

26 Regola di Born

27 Misura e aggiornamento dello stato

28 Valori medi e dispersioni quantistiche

29 Osservabili incompatibili

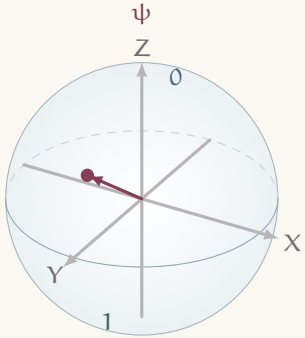
30 Sistemi composti

31 Un esperimento calcolato dall'inizio alla fine

Capitolo 21

Dal vettore al ket

Il vettore non dipende dalla base scelta per scriverlo. La notazione di Dirac rende esplicita questa distinzione.



Sfera di Bloch: stati puri

Lo stesso oggetto, una notazione diversa

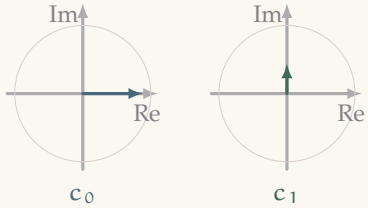
Indichiamo un vettore con $|\psi\rangle$. In una base ortonormale $\{|0\rangle, |1\rangle\}$,

$$|\psi\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

Il ket è il vettore; la colonna è la sua rappresentazione nella base scelta.

In questa parte lavoriamo in dimensione finita e descriviamo anzitutto stati puri.

$$\psi = (2, i)^T / \sqrt{5}$$



Un piano complesso per componente
Cerchi: modulo uno; stessa scala

Chiamiamo puro uno stato descritto da un singolo ket normalizzato, a meno di una fase comune. Il cambio di base cambia soltanto la sua colonna di coordinate.

Esempio ricorrente: normalizzare lo stato

Scegliamo un nuovo esempio, distinto da $(3/5, 4i/5)^T$: partiamo da $|\nu\rangle = 2|0\rangle + i|1\rangle$.

$$\||\nu\rangle\|^2 = |2|^2 + |i|^2 = 4 + 1 = 5.$$

Dividendo per $\sqrt{5}$:

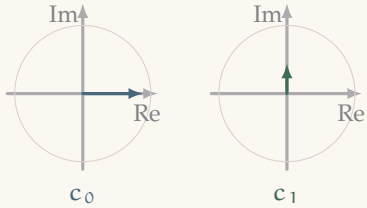
$$|\psi\rangle = \frac{2|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{5}}.$$

Controllo:

$$\||\psi\rangle\|^2 = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1.$$

Questa preparazione prosegue nei moduli 2 e 3.

$$\psi = (2, i)^T/\sqrt{5}$$



Un piano complesso per componente
Cerchi: modulo uno; stessa scala

Le due ampiezze hanno moduli $2/\sqrt{5}$ e $1/\sqrt{5}$ e differenza di fase $\pi/2$.

Fase globale e stato fisico

Come nella prima lezione, una fase comune alle due ampiezze lascia invariato lo stato puro: $|\psi\rangle$ ed $e^{i\gamma}|\psi\rangle$ sono due suoi rappresentanti.

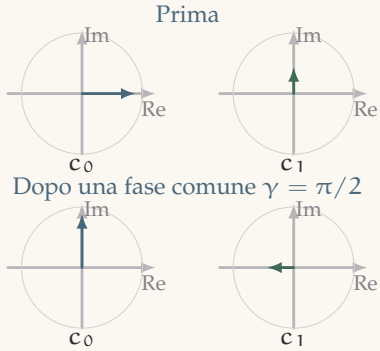
Usiamo per ora il prodotto interno già definito:

$$\langle u, e^{i\gamma}\psi\rangle = e^{i\gamma}\langle u, \psi\rangle.$$

Il modulo del fattore comune vale

$$|e^{i\gamma}|^2 = \cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1.$$

Quindi il modulo quadro del prodotto interno resta invariato, per qualunque u. La regola di Born collegherà questi moduli alle probabilità.



I due piani mostrano una rotazione comune delle componenti. Il punto di Bloch rimane lo stesso.

La fase relativa distingue gli stati

Consideriamo

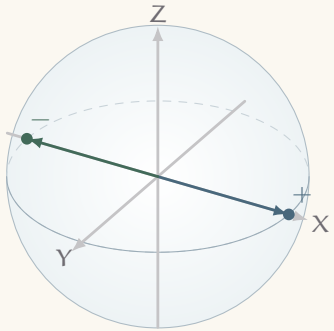
$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Un fattore comune λ dovrebbe soddisfare contemporaneamente $\lambda \cdot 1 = 1$ e $\lambda \cdot 1 = -1$. La prima uguaglianza impone $\lambda = 1$, la seconda $\lambda = -1$: è impossibile.

Il prodotto interno è

$$\langle +, - \rangle = \frac{1 \cdot 1 + 1(-1)}{2} = 0.$$

I due vettori sono ortogonali.



Sulla sfera, $|+\rangle$ è sul semiasse $+X$ e $|-\rangle$ sul semiasse opposto.

Eliminare la fase comune alle ampiezze

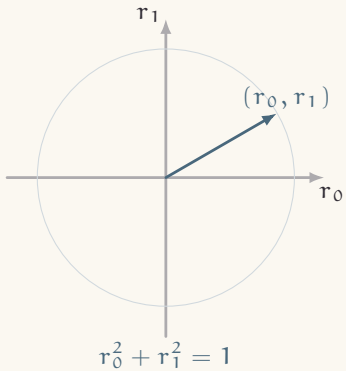
Scriviamo $c_0 = r_0 e^{i\gamma_0}$ e $c_1 = r_1 e^{i\gamma_1}$, con $r_0, r_1 \geq 0$.
La normalizzazione richiede $r_0^2 + r_1^2 = 1$.

Se $r_0 > 0$, moltiplichiamo il ket per $e^{-i\gamma_0}$:

$$(c_0, c_1) \longmapsto (r_0, r_1 e^{i(\gamma_1 - \gamma_0)}).$$

Rimane la fase relativa $\phi = \gamma_1 - \gamma_0$.

Il punto (r_0, r_1) è sul quarto di circonferenza unitario: possiamo scrivere $r_0 = \cos t$, $r_1 = \sin t$ con $0 \leq t \leq \pi/2$.



Qui il disegno riguarda i moduli delle due ampiezze; la sfera di Bloch verrà costruita a partire da essi.

Ricavare i due angoli della sfera

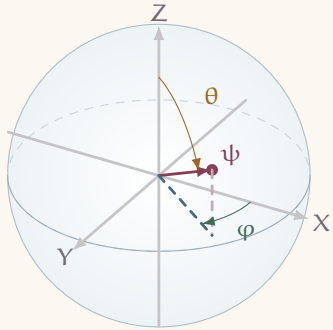
Poniamo $\theta = 2t$, dove t è l'angolo appena ricavato dai moduli:

$$c_0 = \cos\frac{\theta}{2}, \qquad c_1 = e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}.$$

Il mezzo angolo permette di associare alla sfera l'intervallo completo $0 \leq \theta \leq \pi$. Le coordinate che ricaveremo ne mostreranno il motivo.

Se $c_0 = 0$, eliminiamo invece la fase di c_1: lo stato è rappresentato da $(0, 1)$, dunque $\theta = \pi$. Se $c_1 = 0$, otteniamo $(1, 0)$ e $\theta = 0$.

Angolo polare θ e azimut ϕ



Ai poli la fase relativa non distingue stati. Altrove ϕ è definito a meno di multipli di 2π.

Coordinate di Bloch dalle ampiezze

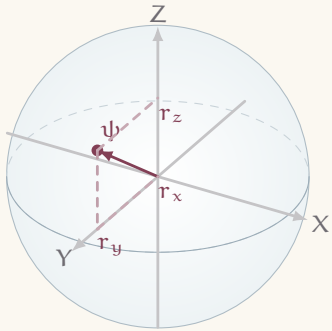
Per $|\psi\rangle = (c_0, c_1)^T$ normalizzato:

$$r_x = 2\Re(c_0^* c_1),$$
$$r_y = 2\Im(c_0^* c_1),$$
$$r_z = |c_0|^2 - |c_1|^2.$$

Sostituendo la parametrizzazione:

$$r = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta).$$

Per uno stato puro $\|r\| = 1$.



Gli assi rappresentano coordinate dello stato. Nella sezione sui valori medi ricaveremo $r_x = \langle X\rangle$, $r_y = \langle Y\rangle$, $r_z = \langle Z\rangle$.

Le identità che producono il doppio angolo

La moltiplicazione di due numeri unitari somma i loro angoli. Perciò

$$e^{2it} = (e^{it})^2 = (\cos t + i \sin t)^2.$$

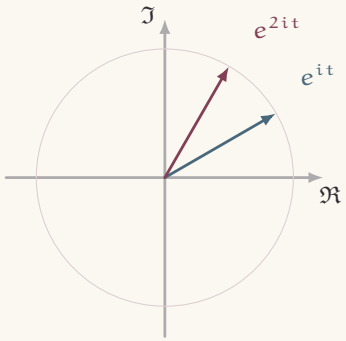
Sviluppando il quadrato:

$$e^{2it} = \cos^2 t - \sin^2 t + 2i \sin t \cos t.$$

Confrontiamo con $\cos 2t + i \sin 2t$:

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t, \qquad \sin 2t = 2 \sin t \cos t.$$

Per $t = \theta/2$ compaiono proprio $\cos\theta$ e $\sin\theta$.



Raddoppiare l'angolo sul piano complesso

Le identità derivano dal prodotto complesso già studiato; non richiedono una nuova regola geometrica.

Dagli angoli alle coordinate di Bloch

Moltiplichiamo le due ampiezze:

$$c_0^* c_1 = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi} = \frac{1}{2}\sin\theta\, e^{i\phi}.$$

Prendendo parte reale e immaginaria:

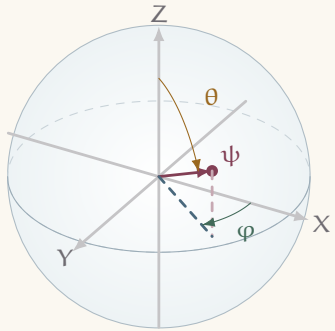
$$r_x = \sin\theta\cos\phi, \quad r_y = \sin\theta\sin\phi.$$

La differenza dei moduli quadri dà

$$r_z = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta.$$

Quindi $\|r\|^2 = \sin^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \cos^2\theta = 1$.

Dalle ampiezze alle coordinate della sfera



Le identità di duplicazione spiegano la comparsa del mezzo angolo nelle ampiezze.

Esempio: lo stato ricorrente sulla sfera

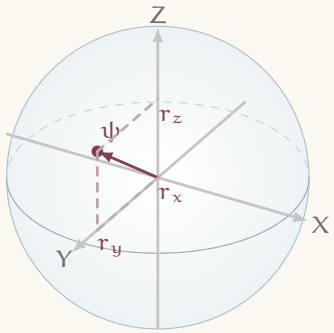
Per $c_0 = 2/\sqrt{5}$ e $c_1 = i/\sqrt{5}$,

$$c_0^* c_1 = \frac{2i}{5}.$$

Le tre coordinate sono

$$r_x = 2\Re(2i/5) = 0,$$
$$r_y = 2\Im(2i/5) = 4/5,$$
$$r_z = 4/5 - 1/5 = 3/5.$$

La norma è $\|r\|^2 = 0 + 16/25 + 9/25 = 1$. La fase relativa è $\phi = \pi/2$.



$r_y = 4/5, \quad r_z = 3/5$

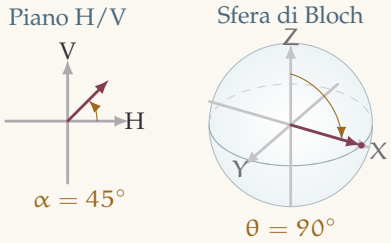
Lo stato giace nel piano YZ, con coordinata verticale 3/5.

Polarizzazione: due angoli da non confondere

Una polarizzazione lineare a α rispetto a H ha ampiezze $c_0 = \cos\alpha$, $c_1 = \sin\alpha$. Con H associata a $|0\rangle$ e V a $|1\rangle$:

$$r_x = 2\cos\alpha\sin\alpha = \sin 2\alpha,$$
$$r_y = 0,$$
$$r_z = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha.$$

Nell'intervallo $0 \le \alpha \le \pi/2$, quindi, $\theta = 2\alpha$. Per $\alpha = 45°$, si ha $r = (\sin 90°, 0, \cos 90°) = (1, 0, 0)$: il punto è sull'asse $+X$.



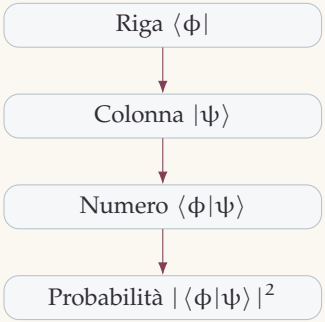
La diagonale H/V corrisponde al punto $+X$.

L'angolo della polarizzazione appartiene al piano H/V; l'angolo di Bloch descrive il punto associato allo stato.

Capitolo 22

Bra e prodotto interno

Un bra applicato a un ket restituisce un numero complesso. Il suo modulo quadro entrerà nelle probabilità.



Dal ket al bra

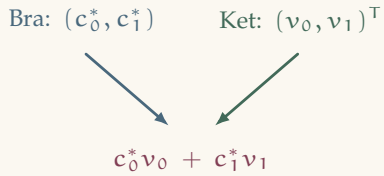
Un bra è una regola che riceve un vettore e restituisce il suo prodotto interno con un vettore fissato. Si scrive $\langle\psi|$ e agisce come

$$\langle\psi|\,|\nu\rangle = \langle\psi,\nu\rangle.$$

In una base ortonormale:

$$|\psi\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad \langle\psi| \leftrightarrow (c_0^*, c_1^*).$$

La riga coniugata moltiplica la colonna di ν e produce uno scalare complesso. Questa regola lineare è chiamata anche funzionale.



Il prodotto misura una componente complessa.

Le due frecce indicano gli ingressi della stessa moltiplicazione.

Due proprietà da tenere distinte

Un bra fissato è lineare nel vettore che riceve:

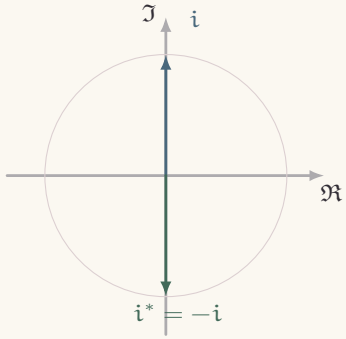
$$\langle\psi|\,(a\,|u\rangle + b\,|v\rangle) = a\,\langle\psi|u\rangle + b\,\langle\psi|v\rangle\,.$$

Nel costruire il bra da un ket, invece, si coniugano anche gli scalari:

$$a\,|u\rangle + b\,|v\rangle \longmapsto a^*\,\langle u| + b^*\,\langle v|\,.$$

Per esempio $|w\rangle = i\,|0\rangle$ ha colonna $(i, 0)^T$ e bra $(-i, 0)$. Di conseguenza

$$\langle w|0\rangle = -i, \qquad \langle 0|\,(i\,|0\rangle) = i.$$



Il coniugio cambia il segno della parte immaginaria

"Antilineare" descrive la costruzione del bra; "lineare" descrive la sua azione sul ket in ingresso.

Esempio: costruire il bra e controllare la norma

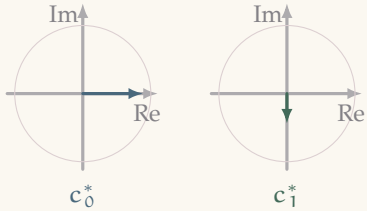
Per lo stato ricorrente,

$$\langle\psi| = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -i\end{pmatrix}.$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \frac{1}{5}[2\cdot 2 + (-i)i]$$
$$= \frac{1}{5}(4+1) = 1.$$

Il segno della seconda componente cambia perché $i^* = -i$.

Coefficienti del bra: $(2, -i)/\sqrt{5}$



Un piano complesso per componente
Cerchi: modulo uno; stessa scala

Usare la sola trasposta darebbe $(4 + i^2)/5 = 3/5$, che non è la norma quadra.

Esempio: prodotto interno fra due stati

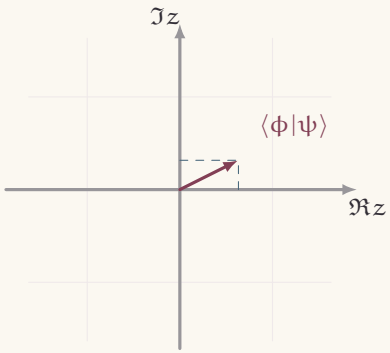
Sia $|\phi\rangle = |+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}\langle\phi|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{10}}[1 \cdot 2 + 1 \cdot i] \\ &= \frac{2+i}{\sqrt{10}}.\end{aligned}$$

Il modulo quadro è

$$|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = \frac{2^2 + 1^2}{10} = \frac{1}{2}.$$

Il risultato è reale soltanto dopo aver preso il modulo quadro.



Piano complesso

Il prodotto interno è un'ampiezza complessa; non è già una probabilità.

Le coordinate come prodotti interni

Per una base ortonormale $\{|k\rangle\}$,

$$\langle j|k\rangle = \delta_{jk}.$$

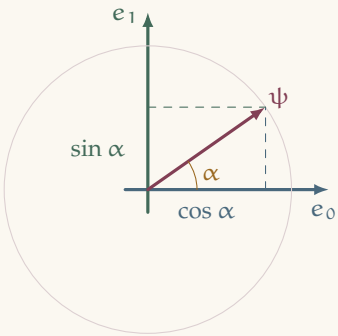
Se $|\psi\rangle = \sum_k c_k |k\rangle$, allora

$$\langle j|\psi\rangle = \sum_k c_k \langle j|k\rangle = c_j.$$

Quindi

$$|\psi\rangle = \sum_k \langle k|\psi\rangle |k\rangle .$$

È la stessa regola delle coordinate ortonormali della parte I.



Piano dei coefficienti reali

Il diagramma è nel piano dei coefficienti reali; la formula vale anche per coefficienti complessi.

La seconda coordinata nella base $+, -$

Il bra di $|-\rangle = (1,-1)^{\mathsf{T}}/\sqrt{2}$ è $(1,-1)/\sqrt{2}$. Pertanto

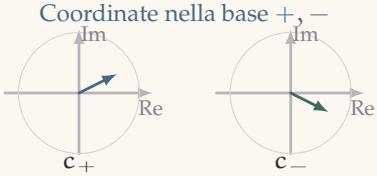
$$c_- = \langle -|\psi\rangle = \frac{1\cdot 2 + (-1)i}{\sqrt{10}} = \frac{2-i}{\sqrt{10}}.$$

Per $c_+ = (2+i)/\sqrt{10}$ e c_-:

$$|c_+|^2 = \frac{2^2+1^2}{10} = \frac{1}{2},$$

$$|c_-|^2 = \frac{2^2+(-1)^2}{10} = \frac{1}{2}.$$

La norma resta $1/2 + 1/2 = 1$; la fase relativa è contenuta nei due coefficienti complessi.



Un cambio di base descrive lo stesso stato. Il suo punto di Bloch resta invariato rispetto agli assi fisici fissati; anche le coordinate degli assi vanno trasformate se si usa la nuova base.

Esempio: cambiare base allo stato ricorrente

Nella base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$:

$$c_+ = \frac{2+i}{\sqrt{10}}, \qquad c_- = \frac{2-i}{\sqrt{10}}.$$

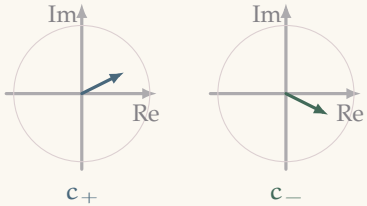
Ricostruiamo la prima componente:

$$\frac{c_+ + c_-}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

La seconda è

$$\frac{c_+ - c_-}{\sqrt{2}} = \frac{2i}{\sqrt{20}} = \frac{i}{\sqrt{5}}.$$

Coordinate nella base $+, -$



Un piano complesso per componente
Cerchi: modulo uno; stessa scala

Le nuove coordinate hanno entrambe modulo quadro 1/2, ma fasi diverse.

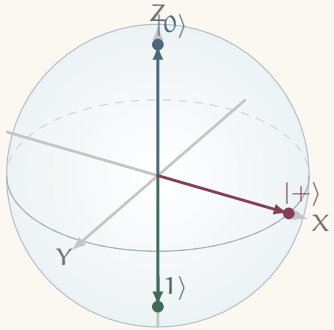
Ortogonalità sul piano e sulla sfera

Per due stati puri con vettori di Bloch r, s separati da un angolo γ,

$$|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = \frac{1 + r \cdot s}{2} = \cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Per punti antipodali, $\gamma = \pi$ e la sovrapposizione è zero.

Per assi perpendicolari, $\gamma = \pi/2$ e il modulo quadro è $1/2$.



Antipodi: modulo quadro 0; raggi perpendicolari: $1/2$.

Per $\gamma = \pi$: $(1 + \cos\pi)/2 = 0$; per $\gamma = \pi/2$: $(1 + \cos(\pi/2))/2 = 1/2$.

Moltiplicare l'ampiezza per il suo coniugato

Poniamo $a = d_0^* c_0$, $b = d_1^* c_1$.

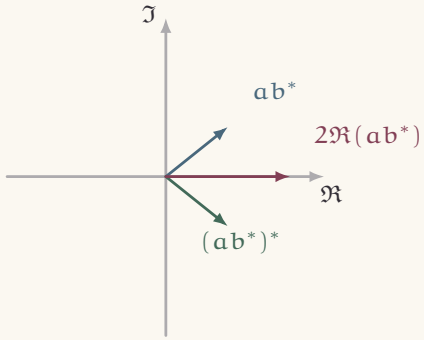
$$|a+b|^2 = (a+b)(a^*+b^*)$$
$$= |a|^2 + |b|^2 + ab^* + ba^*.$$

Poiché $ba^* = (ab^*)^*$,

$$ab^* + ba^* = 2\Re(ab^*) = 2\Re(d_0^* d_1 c_0 c_1^*).$$

Per i moduli, il sistema $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$,
$|c_0|^2 - |c_1|^2 = r_z$ dà, sommando e sottraendo,

$$2|c_0|^2 = 1 + r_z, \qquad 2|c_1|^2 = 1 - r_z.$$



La somma dei termini incrociati è reale

Le due identità separano il contributo dei moduli da quello delle fasi.

Ricavare la sovrapposizione sulla sfera

Siano $\psi = (c_0, c_1)^\top$ e $\phi = (d_0, d_1)^\top$. Espandiamo il modulo quadro:

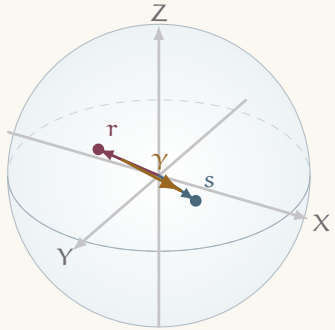
$$\begin{aligned} |\langle\phi|\psi\rangle|^2 &= |d_0^* c_0 + d_1^* c_1|^2 \\ &= |d_0|^2|c_0|^2 + |d_1|^2|c_1|^2 \\ &\quad + 2\Re(d_0^* d_1 c_0 c_1^*). \end{aligned}$$

Dalla normalizzazione e da $r_z = |c_0|^2 - |c_1|^2$:

$$|c_0|^2 = \frac{1 + r_z}{2}, \quad |c_1|^2 = \frac{1 - r_z}{2}.$$

Per d_0, d_1 si usano le stesse formule con s_z.

Due stati puri e l'angolo fra i raggi



La sfera conserva anche i prodotti interni in modulo, non soltanto le probabilità nella base $0, 1$.

Il contributo dei moduli alla sovrapposizione

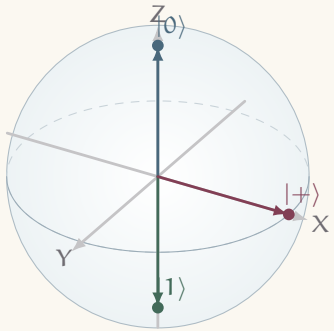
Nei termini diagonali:

$$\begin{aligned}&(1+s_z)(1+r_z)+(1-s_z)(1-r_z)\\&=1+r_z+s_z+s_zr_z\\&\quad+1-r_z-s_z+s_zr_z\\&=2+2s_zr_z.\end{aligned}$$

Il denominatore di questa parte del calcolo è 4:

$$\frac{2+2s_zr_z}{4}=\frac{1+s_zr_z}{2}.$$

Resta da calcolare il contributo delle fasi, contenuto nel prodotto delle componenti complesse.



Antipodi: modulo quadro 0; raggi perpendicolari: 1/2.

Le coordinate verticali descrivono la differenza fra i moduli quadri delle due ampiezze.

Il contributo delle fasi alla sovrapposizione

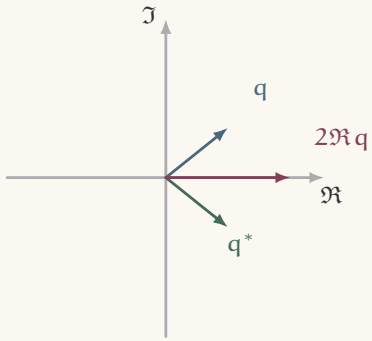
Nel prodotto complesso poniamo $q = (s_x + is_y)(r_x - ir_y)$. Sviluppando:

$$\begin{aligned} q &= s_x r_x - is_x r_y + is_y r_x - i^2 s_y r_y \\ &= s_x r_x + s_y r_y + i(s_y r_x - s_x r_y). \end{aligned}$$

La parte reale è $s_x r_x + s_y r_y$. Il termine incrociato del modulo quadro vale

$$2\Re(q/4) = \frac{s_x r_x + s_y r_y}{2}.$$

Sommando questo contributo a quello dei moduli si ottiene $(1 + r \cdot s)/2$.



I termini coniugati producono un contributo reale

L'identità finale $\cos^2(\gamma/2) = (1 + \cos\gamma)/2$ segue dalla formula del doppio angolo.

Completare il calcolo della sovrapposizione

I termini con i moduli sommano a

$$\frac{(1+s_z)(1+r_z)+(1-s_z)(1-r_z)}{4}=\frac{1+s_z r_z}{2}.$$

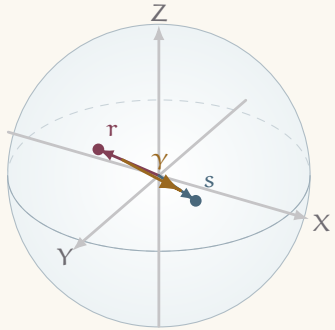
Poiché $d_0^* d_1 = (s_x + i s_y)/2$ e $c_0 c_1^* = (r_x - i r_y)/2$, il termine incrociato è

$$2\Re\frac{(s_x+is_y)(r_x-ir_y)}{4}=\frac{s_x r_x + s_y r_y}{2}.$$

Sommando:

$$|\langle\phi|\psi\rangle|^2=\frac{1+r\cdot s}{2}=\frac{1+\cos\gamma}{2}=\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Due stati puri e l'angolo fra i raggi

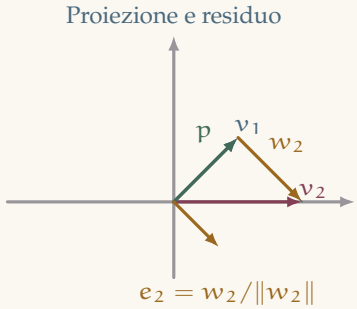


Per stati puri $\|r\| = \|s\| = 1$; per questo il loro prodotto scalare è $\cos\gamma$.

Capitolo 23

Prodotto diadico e proiettori

Invertendo l'ordine di bra e ket si costruisce un operatore. I proiettori estraggono una componente dello stato.



$$v_2 = p + w_2$$

Due ordini, due risultati

Un bra seguito da un ket dà uno scalare:

$$\langle \phi | \psi \rangle \in \mathbb{C}.$$

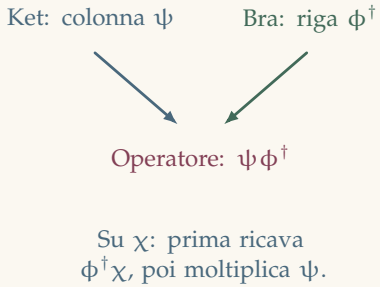
Un ket seguito da un bra dà un operatore:

$$|\psi\rangle \langle \phi| : \mathcal{H} \to \mathcal{H}.$$

Su un terzo vettore agisce così:

$$(|\psi\rangle \langle \phi|) |\chi\rangle = \langle \phi | \chi \rangle |\psi\rangle .$$

Il risultato è nella direzione di $|\psi\rangle$.



Il controllo del tipo del risultato aiuta a riconoscere un ordine di moltiplicazione sbagliato.

Esempio: prodotto diadico completo

Con $|\psi\rangle = (2, i)^T/\sqrt{5}$ e $|\phi\rangle = (1, 1)^T/\sqrt{2}$:

$$|\psi\rangle\langle\phi| = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}2\\ i\end{pmatrix}(1 \;\; 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}2\cdot 1 & 2\cdot 1\\ i\cdot 1 & i\cdot 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}2 & 2\\ i & i\end{pmatrix}.$$

La traccia è $(2+i)/\sqrt{10} = \langle\phi|\psi\rangle$.

Indice di colonna

	0	1
0	2	2
1	i	i

Elementi della matrice

La tabella mostra gli elementi della matrice prima del fattore comune $1/\sqrt{10}$.

Il proiettore su uno stato

Per $|u\rangle$ normalizzato,

$$P_u = |u\rangle \langle u| .$$

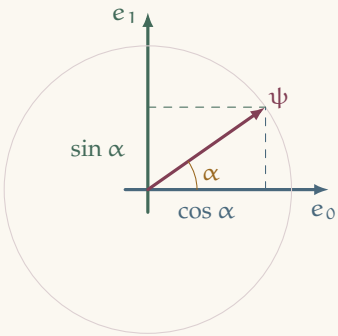
$$P_u |\psi\rangle = \langle u|\psi\rangle |u\rangle .$$

Le proprietà seguono direttamente:

$$P_u^2 = |u\rangle \langle u|u\rangle \langle u| = P_u,$$

$$P_u^\dagger = P_u, \qquad \operatorname{Tr} P_u = \langle u|u\rangle = 1.$$

Per u non normalizzato bisogna dividere per $\langle u|u\rangle$.



Piano dei coefficienti reali

La proiezione è un vettore generalmente più corto; la sua norma contiene l'informazione sul peso della componente.

Aggiunto, traccia e fase del proiettore

Con $u^\dagger u = 1$, la regola dell'aggiunto dà

$$(uu^\dagger)^\dagger = (u^\dagger)^\dagger u^\dagger = uu^\dagger.$$

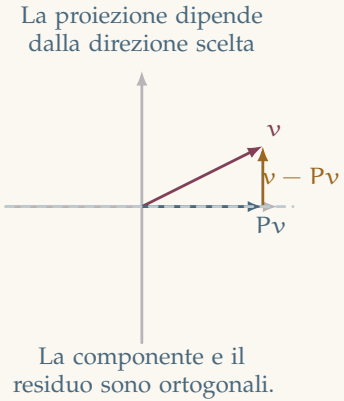
Gli elementi diagonali sono $u_j u_j^* = |u_j|^2$:

$$\mathrm{Tr}(uu^\dagger) = \sum_j |u_j|^2 = 1.$$

Una fase comune si cancella:

$$(e^{i\gamma}u)(e^{i\gamma}u)^\dagger = e^{i\gamma}e^{-i\gamma}uu^\dagger = uu^\dagger.$$

Per $u \neq 0$ non normalizzato, il proiettore è $P_u = uu^\dagger/(u^\dagger u)$.



Il denominatore compensa la lunghezza del vettore usato per rappresentare la direzione.

Le quattro entrate di P_ψ^2

Indichiamo con $B = \left(\begin{smallmatrix} 4 & -2i \\ 2i & 1 \end{smallmatrix}\right)$ il numeratore di P_ψ.
Il prodotto B^2 ha elementi

$$(B^2)_{11} = 4 \cdot 4 + (-2i)(2i) = 16 - 4i^2 = 20,$$
$$(B^2)_{12} = 4(-2i) + (-2i)1 = -8i - 2i = -10i,$$
$$(B^2)_{21} = (2i)4 + 1(2i) = 8i + 2i = 10i,$$
$$(B^2)_{22} = (2i)(-2i) + 1 \cdot 1 = -4i^2 + 1 = 5.$$

Quindi $B^2 = 5B$ e $P_\psi^2 = B^2/25 = B/5 = P_\psi$.

$B^2 = 5B$

	0	1
0	20	$-10i$
1	$10i$	5

Esempio: proiettore dello stato ricorrente

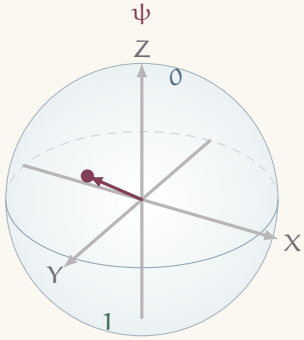
$$P_\psi = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\ i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -i\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -2i\\ 2i & 1\end{pmatrix}.$$

Verifichiamo l'idempotenza:

$$P_\psi^2 = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}16+4 & -8i-2i\\ 8i+2i & 4+1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix}20 & -10i\\ 10i & 5\end{pmatrix} = P_\psi.$$

La traccia è $(4+1)/5 = 1$.



Sfera di Bloch: stati puri

Il proiettore individua lo stesso stato puro indipendentemente dalla fase globale del ket.

Completezza e ricostruzione

Per una base ortonormale:

$$\sum_k |k\rangle \langle k| = I.$$

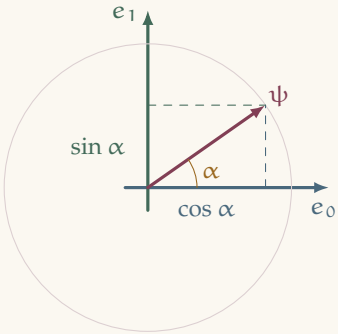
Applicandola a un ket:

$$\sum_k |k\rangle \langle k|\psi\rangle = |\psi\rangle .$$

Per un qubit:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$P_0 + P_1 = I$ e $P_0 P_1 = 0$.



Piano dei coefficienti reali

$P_0 = (1,0)^T(1,0)$ e $P_1 = (0,1)^T(0,1)$: le entrate sono prodotti delle componenti. La somma ha diagonale $(1,1)$; nel prodotto ogni entrata è zero.

Costruire i proiettori della base

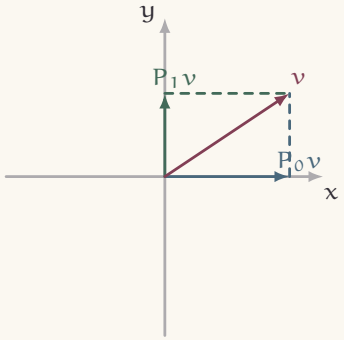
Svolgiamo i due prodotti esterni:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 & 1\cdot 0 \\ 0\cdot 1 & 0\cdot 0 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 & 0\cdot 1 \\ 1\cdot 0 & 1\cdot 1 \end{pmatrix}.$$

La somma è $\left(\begin{smallmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{smallmatrix}\right) = I$. Nel prodotto:

$$P_0 P_1 = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 0 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Applicati a $(c_0, c_1)^T$, restituiscono $(c_0, 0)^T$ e $(0, c_1)^T$, la cui somma ricostruisce il vettore.



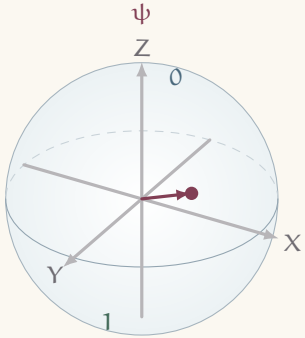
Sezione reale: componenti ortogonali

Nel caso complesso la ricostruzione usa la stessa somma, con coefficienti complessi.

Capitolo 24

Operatori e trasformazioni del qubit

Le matrici già studiate diventano operazioni su stati. Manteniamo distinta l'azione fisica da un cambio di coordinate.



Sfera di Bloch: stati puri

Scrivere un operatore in notazione di Dirac

Inseriamo due volte l'identità:

$$A = \left(\sum_j |j\rangle \langle j| \right) A \left(\sum_k |k\rangle \langle k| \right)$$
$$= \sum_{j,k} |j\rangle \langle j| A |k\rangle \langle k| .$$

Definendo $A_{jk} = \langle j| A |k\rangle$,

$$A = \sum_{j,k} A_{jk} |j\rangle \langle k| .$$

I coefficienti dipendono dalla base; l'operatore no.

	Indice di colonna 0	Indice di colonna 1
0	A_{00}	A_{01}
1	A_{10}	A_{11}

Elementi della matrice

La regola dell'aggiunto inverte i fattori: $(\psi\phi^\dagger)^\dagger = (\phi^\dagger)^\dagger \psi^\dagger = \phi\psi^\dagger$.

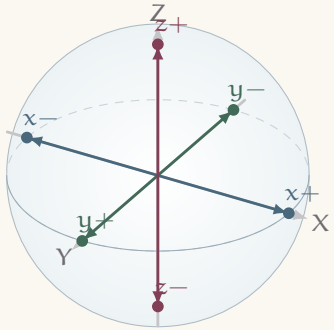
Le tre matrici di Pauli

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|,$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -i\,|0\rangle\langle 1| + i\,|1\rangle\langle 0|,$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|.$$

Sono hermitiane e unitarie; il loro quadrato è I.



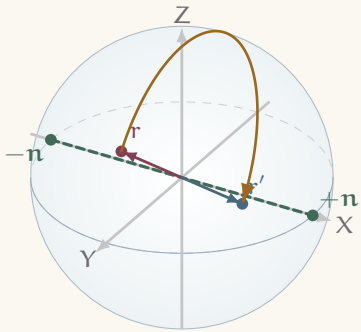
Le coppie di autostati occupano i punti antipodali dei tre assi. Le pagine seguenti verificano proprietà e azione delle matrici.

L'operazione X: un mezzo giro

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + 1\cdot 1 & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = I.$$

La matrice è reale e simmetrica: $X^\dagger = X$. Su un vettore agisce come $X(c_0, c_1)^\mathsf{T} = (c_1, c_0)^\mathsf{T}$. Il prodotto $c_0^* c_1$ diventa il suo coniugato; la differenza dei moduli cambia segno:

$$(r_x, r_y, r_z) \longmapsto (r_x, -r_y, -r_z).$$



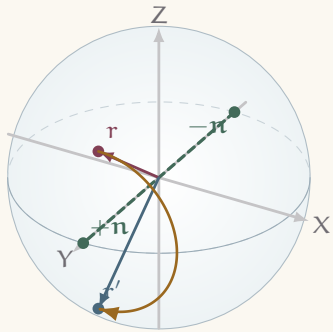
Poiché $X^\dagger = X$ e $X^2 = I$, anche $X^\dagger X = I$: l'operazione è unitaria.

L'operazione Y: un mezzo giro

$$Y^2 = \begin{pmatrix} (-i)i & 0 \\ 0 & i(-i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i^2 & 0 \\ 0 & -i^2 \end{pmatrix} = I.$$

Trasponendo e coniugando si ritrova Y: $Y^\dagger = Y$. L'azione è $Y(c_0, c_1)^T = (-ic_1, ic_0)^T$. Il prodotto fra le nuove componenti è $(ic_1^*)(ic_0) = -c_1^* c_0$, mentre i moduli si scambiano:

$$(r_x, r_y, r_z) \longmapsto (-r_x, r_y, -r_z).$$



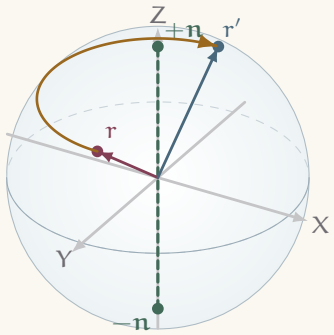
Poiché $Y^\dagger = Y$ e $Y^2 = I$, anche $Y^\dagger Y = I$: l'operazione è unitaria.

L'operazione Z: un mezzo giro

$$Z^2 = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0(-1) \\ 0\cdot 1 + (-1)0 & 0\cdot 0 + (-1)(-1) \end{pmatrix} = I.$$

La matrice è reale e diagonale: $Z^\dagger = Z$. L'azione è $Z(c_0, c_1)^T = (c_0, -c_1)^T$. Il prodotto $c_0^* c_1$ cambia segno, mentre i moduli rimangono invariati:

$$(r_x, r_y, r_z) \longmapsto (-r_x, -r_y, r_z).$$



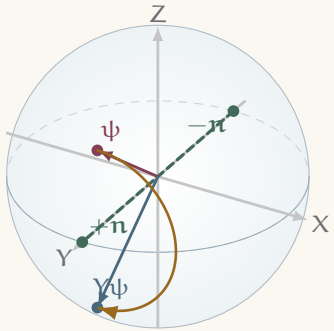
Poiché $Z^\dagger = Z$ e $Z^2 = I$, anche $Z^\dagger Z = I$: l'operazione è unitaria.

Esempio: applicare Y allo stato ricorrente

Per via matriciale:

$$\begin{aligned} Y|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + (-i)i \\ i \cdot 2 + 0 \cdot i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La norma quadra è $(1+4)/5 = 1$.



Il punto passa da $(0, 4/5, 3/5)$ a $(0, 4/5, -3/5)$: un mezzo giro attorno a Y.

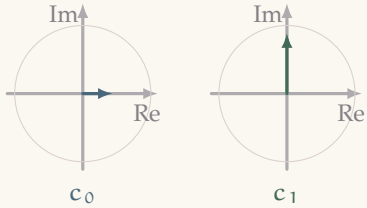
Esempio: lo stesso calcolo con bra e ket

Usiamo $\langle 1|\psi\rangle = i/\sqrt{5}$ e $\langle 0|\psi\rangle = 2/\sqrt{5}$:

$$\begin{aligned} Y|\psi\rangle &= (-i\,|0\rangle\langle 1| + i\,|1\rangle\langle 0|)\,|\psi\rangle \\ &= -i\frac{i}{\sqrt{5}}|0\rangle + i\frac{2}{\sqrt{5}}|1\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{2i}{\sqrt{5}}|1\rangle\,. \end{aligned}$$

Il risultato coincide con quello matriciale.

Stesso stato, seconda via di calcolo



Un piano complesso per componente
Cerchi: modulo uno; stessa scala

La notazione di Dirac rende visibili i coefficienti selezionati da ciascun bra.

Hadamard: scambiare due basi

Definiamo

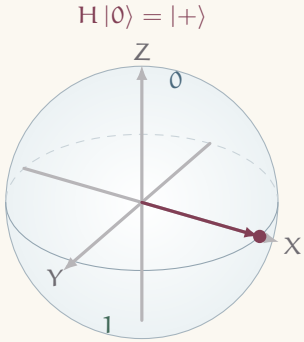
$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le colonne danno $H|0\rangle = |+\rangle$ e $H|1\rangle = |-\rangle$.

$$H^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+1 & 1-1 \\ 1-1 & 1+1 \end{pmatrix} = I.$$

Quindi $H|+\rangle = |0\rangle$, $H|-\rangle = |1\rangle$.

Qui H indica Hadamard, non una hermitiana generica.



Sfera di Bloch: stati puri

Applicare la porta trasforma lo stato; riscriverne le coordinate in una nuova base non lo trasforma.

Le quattro azioni di Hadamard

Sui vettori della base:

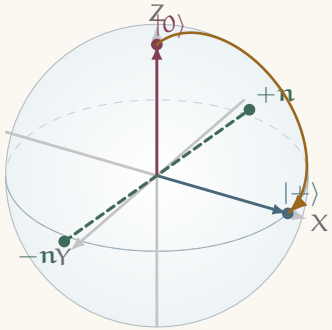
$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 1 - 1\cdot 0 \end{pmatrix} = |+\rangle\,,$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 0 - 1\cdot 1 \end{pmatrix} = |-\rangle\,.$$

Sulle due diagonali:

$$H|+\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = |0\rangle\,,$$

$$H|-\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = |1\rangle\,.$$



Sulla sfera la trasformazione è un mezzo giro attorno all'asse a metà fra X e Z.

Calcolare la trasformazione di Bloch per Hadamard

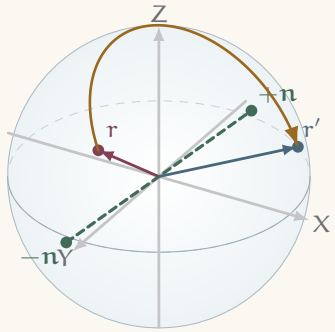
Le nuove ampiezze sono $d_0 = (c_0 + c_1)/\sqrt{2}$ e $d_1 = (c_0 - c_1)/\sqrt{2}$. Il loro prodotto è

$$d_0^* d_1 = \frac{|c_0|^2 - |c_1|^2 + c_1^* c_0 - c_0^* c_1}{2} = \frac{r_z - i r_y}{2}.$$

Quindi $r'_x = r_z$, $r'_y = -r_y$. La differenza dei moduli dà

$$r'_z = \frac{|c_0 + c_1|^2 - |c_0 - c_1|^2}{2} = 2\Re(c_0^* c_1) = r_x.$$

La mappa è $(r_x, r_y, r_z) \mapsto (r_z, -r_y, r_x)$.



Il calcolo distingue la rotazione dello stato dalla semplice riscrittura delle sue coordinate.

Cambiare le coordinate o trasformare lo stato

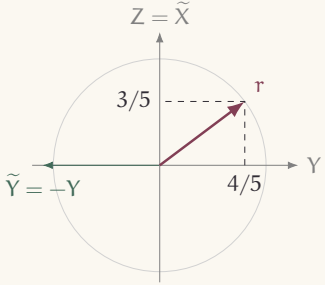
Nella base $|+\rangle, |-\rangle$, lo stato $\psi = (2, i)^T/\sqrt{5}$ ha coordinate $d = (2+i, 2-i)^T/\sqrt{10}$:

$$d_0^* d_1 = \frac{(2-i)^2}{10} = \frac{4-4i-1}{10} = \frac{3-4i}{10}.$$

In questa base, $\widetilde{r} = (3/5, -4/5, 0)$, poiché $|d_0|^2 = |d_1|^2 = 1/2$. Le identità $HXH = Z$, $HYH = -Y$, $HZH = X$ fissano i nuovi assi $\widetilde{X} = Z$, $\widetilde{Y} = -Y$, $\widetilde{Z} = X$. Perciò

$$r = \tfrac{3}{5}Z - \tfrac{4}{5}(-Y) + 0X = \tfrac{4}{5}Y + \tfrac{3}{5}Z.$$

Applicando fisicamente H, invece, d descrive un nuovo stato rispetto agli assi originali.



Sezione YZ di Bloch.
Il punto e gli assi fisici sono fissati.
$\widetilde{Z} = X$ è perpendicolare al foglio.

Il cambio di base conserva lo stato; una porta applicata alla preparazione lo trasforma.

Esempio: una porta di fase

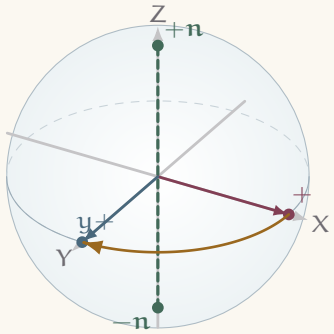
La porta $S = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right)$ aggiunge un quarto di giro alla fase della seconda ampiezza:

$$S\,|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + i\cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Chiamiamo questo ket $|y+\rangle$; ne verificheremo l'equazione propria per Y. Prima dell'operazione $c_0^* c_1 = 1/2$, dopo vale $i/2$. Quindi

$$(1, 0, 0) \longmapsto (0, 1, 0).$$

I due moduli quadri restano $1/2$.



Sulla sfera, il punto passa da $+X$ a $+Y$ mediante una rotazione attorno a Z.

L'operatore che fissa l'asse di rotazione

Un versore reale $n = (n_x, n_y, n_z)$ ha lunghezza uno. La combinazione

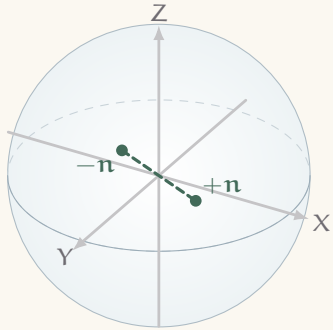
$$N = n \cdot \sigma = n_x X + n_y Y + n_z Z.$$

$$N = \begin{pmatrix} n_z & n_x - i n_y \\ n_x + i n_y & -n_z \end{pmatrix}$$

è hermitiana: la diagonale è reale e le entrate fuori diagonale sono coniugate.

L'asse n individua una direzione sulla sfera. L'operatore N è invece una matrice che agisce sulle due ampiezze. Calcolandone il quadrato troveremo $N^2 = I$.

Un asse generico sulla sfera



La notazione $n \cdot \sigma$ abbrevia una combinazione lineare delle tre matrici, con coefficienti reali.

Verificare tutte le entrate di N^2

Il prodotto delle entrate coniugate è

$$\begin{aligned}(n_x - in_y)(n_x + in_y) &= n_x^2 + in_x n_y \\ &\quad - in_y n_x - i^2 n_y^2 \\ &= n_x^2 + n_y^2.\end{aligned}$$

I due elementi diagonali del quadrato sono dunque $n_z^2 + n_x^2 + n_y^2 = 1$ e $n_x^2 + n_y^2 + (-n_z)^2 = 1$.

Fuori diagonale:

$$(N^2)_{12} = n_z(n_x - in_y) - (n_x - in_y)n_z = 0,$$

$$(N^2)_{21} = (n_x + in_y)n_z - n_z(n_x + in_y) = 0.$$

Pertanto $N^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = I$.

$N^2 = I$

	0	1
0	1	0
1	0	1

I coefficienti n_x, n_y, n_z sono numeri reali: i prodotti misti si cancellano.

Le porte come rotazioni sulla sfera

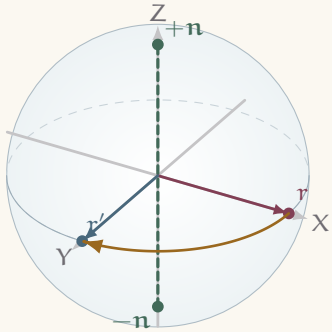
A meno di una fase globale, ogni unitaria di un qubit ha forma

$$R_n(\alpha) = e^{-i\alpha(n\cdot\sigma)/2}.$$

Il suo punto di Bloch ruota di α attorno a n. Con $N = n \cdot \sigma$ e $N^2 = I$, il metodo spettrale fornisce

$$R_n(\alpha) = \cos\frac{\alpha}{2} I - i \sin\frac{\alpha}{2} N.$$

Ricaviamo la formula e la applichiamo a un quarto di giro attorno a X; la caratterizzazione generale spiegherà poi perché ogni unitaria induce una rotazione di Bloch.

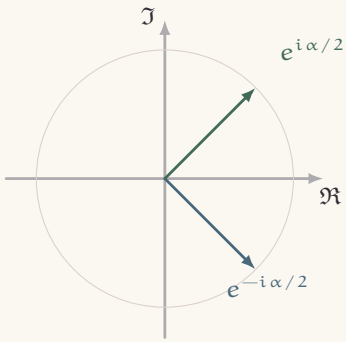


La dimostrazione collegherà la struttura delle colonne, i prodotti delle Pauli e la geometria della sfera.

Ricavare la formula mediante lo spettro

Da $N^2 = I$, gli autovalori di N sono ± 1. I proiettori sono $P_\pm = (I \pm N)/2$, come per X. Quindi

$$\begin{aligned} R_n(\alpha) &= e^{-i\alpha/2} P_+ + e^{i\alpha/2} P_- \\ &= \frac{e^{-i\alpha/2} + e^{i\alpha/2}}{2} I \\ &\quad + \frac{e^{-i\alpha/2} - e^{i\alpha/2}}{2} N \\ &= \cos\frac{\alpha}{2} I - i \sin\frac{\alpha}{2} N. \end{aligned}$$



Le direzioni proprie acquistano fasi opposte

Per $\alpha = 2\pi$, $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$ e quindi $R_n(2\pi) = -I$. La fase comune -1 lascia invariato lo stato.

Esempio: un quarto di giro attorno a X

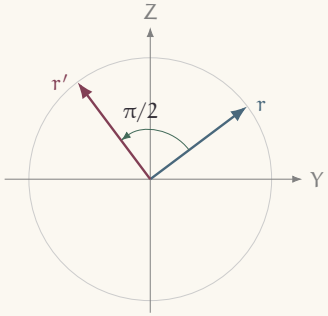
Riprendiamo $|\psi\rangle = (2, i)^{\mathsf{T}}/\sqrt{5}$ e scegliamo $n = (1, 0, 0)$, $\alpha = \pi/2$:

$$R_x(\pi/2) = \frac{I - iX}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Il prodotto sulle ampiezze dà

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-i)i \\ (-i)2 + 1 \cdot i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 2 + 1 \\ -2i + i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ -i \end{pmatrix}.$$

La norma quadra è $(9 + 1)/10 = 1$.



Piano YZ; asse +X verso il lettore.
$(0, 4/5, 3/5) \to (0, -3/5, 4/5)$

Le due ampiezze vengono aggiornate mediante la stessa unitaria; la pagina seguente ne confronta le coordinate geometriche.

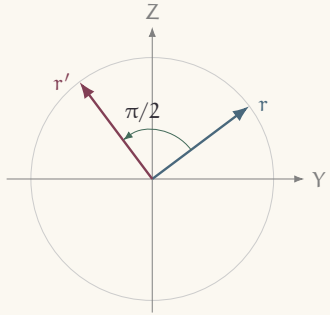
Verificare la rotazione sulle coordinate

Dalle nuove ampiezze $c'_0 = 3/\sqrt{10}$, $c'_1 = -i/\sqrt{10}$, ricaviamo $c'^{*}_0 c'_1 = -3i/10$. Pertanto

$$\begin{aligned} r'_x &= 2\Re(-3i/10) = 0, \\ r'_y &= 2\Im(-3i/10) = 2(-3/10) = -3/5, \\ r'_z &= |3/\sqrt{10}|^2 - |-i/\sqrt{10}|^2 \\ &= (9-1)/10 = 4/5. \end{aligned}$$

Il punto resta sulla sfera:

$$\|r'\|^2 = 0 + 9/25 + 16/25 = 1.$$



Piano YZ; asse +X verso il lettore.
$(0, 4/5, 3/5) \to (0, -3/5, 4/5)$

Il prodotto fra le ampiezze determina le coordinate X e Y; la differenza dei moduli quadri determina Z.

Separare la fase di una matrice unitaria

Sia U unitaria 2×2. Per $U^\dagger U = I$, i determinanti soddisfano

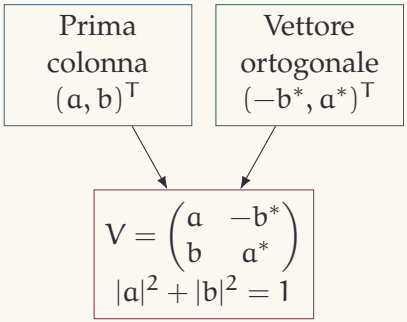
$$1 = \det(U^\dagger U) = (\det U)^* \det U = |\det U|^2.$$

Esiste quindi $\gamma \in \mathbb{R}$ con $\det U = e^{2i\gamma}$. Poniamo $V = e^{-i\gamma} U$:

$$V^\dagger V = e^{i\gamma} U^\dagger e^{-i\gamma} U = I,$$

$$\det V = (e^{-i\gamma})^2 \det U = 1.$$

Abbiamo $U = e^{i\gamma} V$. Il fattore comune modifica la fase delle due ampiezze nella stessa misura.



La matrice V appartiene a SU(2), l'insieme delle matrici unitarie 2 per 2 con determinante uno.

Ricostruire la seconda colonna

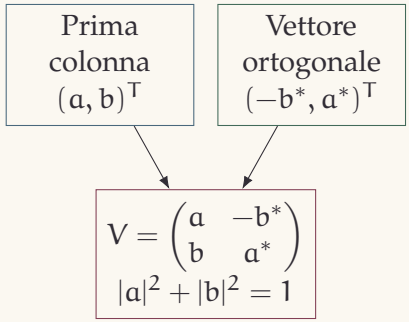
Sia $(a, b)^T$ la prima colonna di V. Essa ha norma uno. Il vettore $q = (-b^*, a^*)^T$ soddisfa

$$\langle (a, b), q \rangle = -a^* b^* + b^* a^* = 0,$$
$$\|q\|^2 = |b|^2 + |a|^2 = 1.$$

Il complemento ortogonale ha dimensione uno; la seconda colonna è λq, con $|\lambda| = 1$. Quindi

$$\det \begin{pmatrix} a & -\lambda b^* \\ b & \lambda a^* \end{pmatrix} = \lambda(|a|^2 + |b|^2) = \lambda.$$

Da $\det V = 1$ segue $\lambda = 1$ e $V = \left(\begin{smallmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{smallmatrix}\right)$.



La struttura della matrice deriva dall'ortogonalità delle colonne e dal determinante, comprese le colonne con una componente nulla.

Esprimere la matrice con quattro numeri reali

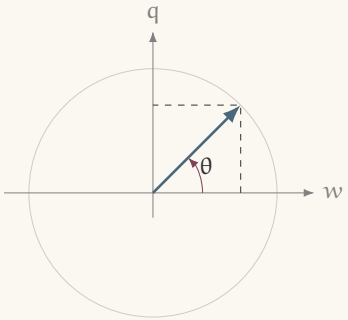
Scriviamo $a = w - iz$ e $b = y - ix$, dove w, x, y, z sono reali. Allora

$$V = \begin{pmatrix} w - iz & -y - ix \\ y - ix & w + iz \end{pmatrix}$$
$$= wI - i(xX + yY + zZ).$$

La norma della prima colonna impone

$$1 = |a|^2 + |b|^2 = w^2 + z^2 + y^2 + x^2.$$

Ponendo $q = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, otteniamo $w^2 + q^2 = 1$ e $q \geq 0$.



$w = \cos\theta$, $q = \sin\theta \geq 0$
Illustrazione: $\theta = \pi/4$.

Quattro coefficienti reali, soggetti a una relazione, descrivono la matrice dopo aver separato la fase globale.

Determinare l'asse e l'angolo

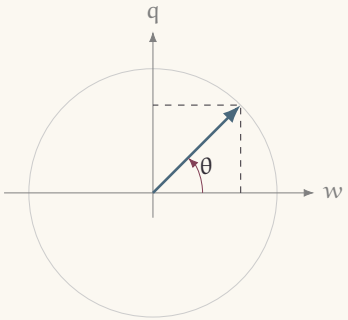
Se $q > 0$, scegliamo $\theta \in [0, \pi]$ con $w = \cos\theta$, $q = \sin\theta$, e definiamo

$$n = (x, y, z)/q, \qquad \|n\|^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{q^2} = 1.$$

Poiché $xX + yY + zZ = q(n \cdot \sigma)$,

$$V = \cos\theta\, I - i \sin\theta\, (n \cdot \sigma) = R_n(2\theta).$$

Se $q = 0$, allora $x = y = z = 0$ e $w = \pm 1$: $V = I = R_n(0)$ oppure $V = -I = R_n(2\pi)$, con asse arbitrario.



$w = \cos\theta$, $q = \sin\theta \geq 0$
Illustrazione: $\theta = \pi/4$.

Ponendo $\alpha = 2\theta$ si ottiene $U = e^{i\gamma} R_n(\alpha)$. Resta da dimostrare l'effettiva rotazione del vettore di Bloch.

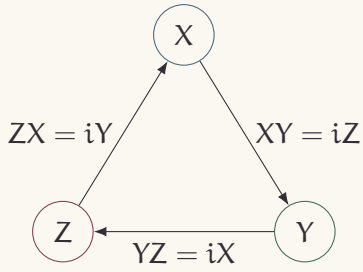
Calcolare i prodotti misti: X e Y

Moltiplichiamo le matrici già definite:

$$\begin{aligned} XY &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + 1\cdot i & 0(-i) + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 0 + 0\cdot i & 1(-i) + 0\cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = iZ. \end{aligned}$$

Poiché X, Y e Z sono hermitiane,

$$YX = (XY)^\dagger = (iZ)^\dagger = -iZ.$$



Invertire l'ordine cambia il segno.

Il cambio di segno deriva dal coniugio del fattore i quando si inverte l'ordine mediante l'aggiunto.

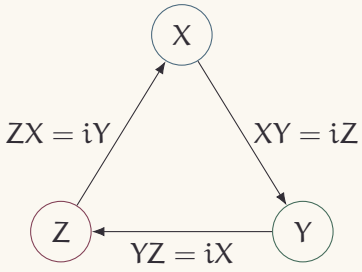
Calcolare i prodotti misti: Y e Z

Il secondo prodotto ciclico è

$$\begin{aligned} YZ &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + (-i)0 & 0\cdot 0 + (-i)(-1) \\ i\cdot 1 + 0\cdot 0 & i\cdot 0 + 0(-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = iX. \end{aligned}$$

Nell'ordine opposto,

$$ZY = (YZ)^\dagger = (iX)^\dagger = -iX.$$



Invertire l'ordine cambia il segno.

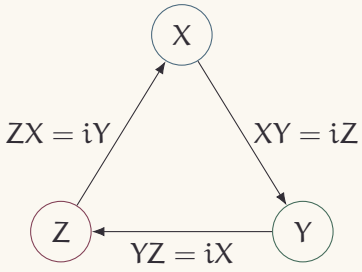
Due direzioni diverse producono la terza matrice di Pauli, moltiplicata per una fase che dipende dall'ordine.

Calcolare i prodotti misti: Z e X

Il terzo prodotto ciclico dà

$$\begin{aligned} ZX &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + (-1)1 & 0\cdot 1 + (-1)0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = iY. \end{aligned}$$

Quindi $XZ = (ZX)^\dagger = -iY$. Insieme ai quadrati $X^2 = Y^2 = Z^2 = I$, questi sei prodotti coprono tutte le coppie.



Invertire l'ordine cambia il segno.

Le nove coppie permettono di moltiplicare qualunque combinazione lineare delle Pauli senza introdurre nuove matrici.

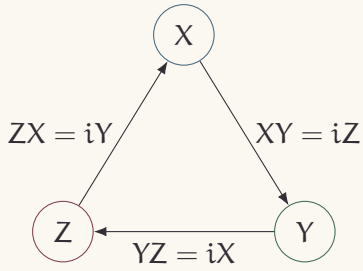
Raggruppare le nove coppie

Per vettori reali a e b, sviluppiamo $A = a_x X + a_y Y + a_z Z$ e $B = b_x X + b_y Y + b_z Z$. I tre quadrati e i sei prodotti misti danno

$$\begin{aligned} AB = {} & (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) I \\ & + i(a_y b_z - a_z b_y) X \\ & + i(a_z b_x - a_x b_z) Y \\ & + i(a_x b_y - a_y b_x) Z. \end{aligned}$$

I tre coefficienti nell'ultima parte definiscono $a \times b$, il prodotto vettoriale. Pertanto

$$(a \cdot \sigma)(b \cdot \sigma) = (a \cdot b) I + i(a \times b) \cdot \sigma.$$



Invertire l'ordine cambia il segno.

Il prodotto scalare genera la parte proporzionale all'identità; il prodotto vettoriale genera le altre tre componenti.

Leggere il vettore di Bloch nel proiettore

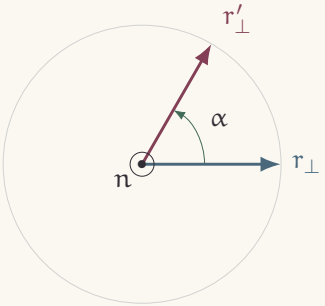
Per $|\psi\rangle = (c_0, c_1)^T$, con norma uno,

$$P = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* \\ c_1 c_0^* & |c_1|^2 \end{pmatrix}.$$

Le coordinate note sono $r_x = 2\Re(c_0^* c_1)$, $r_y = 2\Im(c_0^* c_1)$ e $r_z = |c_0|^2 - |c_1|^2$. Ne segue

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + r_z & r_x - i r_y \\ r_x + i r_y & 1 - r_z \end{pmatrix} = \frac{I + r \cdot \sigma}{2}.$$

Dopo U, il proiettore diventa $P' = UPU^\dagger = VPV^\dagger$: le fasi globali si cancellano.



Piano perpendicolare a n.
Illustrazione: $\alpha = \pi/3$.

Il proiettore contiene le tre coordinate geometriche e permette di seguirne l'evoluzione per coniugazione.

Sviluppare tutti i termini della coniugazione

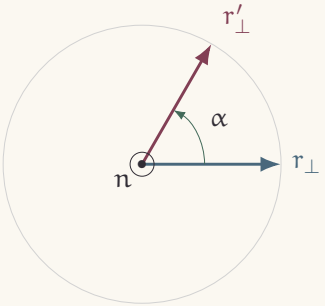
Poniamo $c = \cos(\alpha/2)$, $s = \sin(\alpha/2)$, $N = n \cdot \sigma$ e $Q = r \cdot \sigma$. Allora $V = cI - isN$ e $V^\dagger = cI + isN$.

$$\begin{aligned} VQV^\dagger &= (cI - isN)Q(cI + isN) \\ &= c^2Q + icsQN - icsNQ + s^2NQN \\ &= c^2Q + ics(QN - NQ) + s^2NQN. \end{aligned}$$

Inoltre $VIV^\dagger = I$, per cui

$$P' = \frac{I + VQV^\dagger}{2}.$$

Occorre esprimere i due prodotti residui nelle coordinate di n e r.



Piano perpendicolare a n.
Illustrazione: $\alpha = \pi/3$.

La formula mantiene distinti il termine iniziale, il commutatore e il prodotto con N su entrambi i lati.

Calcolare il commutatore delle due direzioni

L'identità delle Pauli fornisce

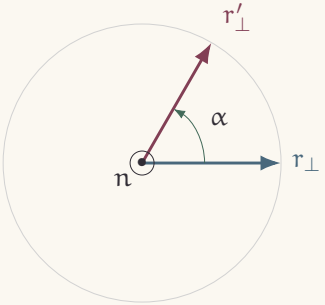
$$QN = (r \cdot n)I + i(r \times n) \cdot \sigma,$$
$$NQ = (n \cdot r)I + i(n \times r) \cdot \sigma.$$

Poiché $r \cdot n = n \cdot r$ e $r \times n = -n \times r$,

$$QN - NQ = -2i(n \times r) \cdot \sigma.$$

Il termine misto diventa quindi

$$\begin{aligned} ics(QN - NQ) &= ics(-2i)(n \times r) \cdot \sigma \\ &= 2cs(n \times r) \cdot \sigma. \end{aligned}$$



Piano perpendicolare a n.
Illustrazione: $\alpha = \pi/3$.

Il prodotto vettoriale individua la direzione tangente al moto attorno all'asse n.

Calcolare il prodotto con N sui due lati

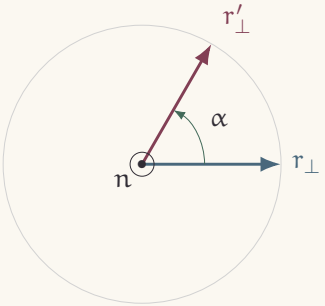
Sommando le stesse identità, le parti con prodotto vettoriale si cancellano:

$$QN + NQ = 2(n \cdot r)I.$$

Moltiplichiamo a destra per N e usiamo $N^2 = I$:

$$(QN + NQ)N = 2(n \cdot r)N,$$
$$QN^2 + NQN = 2(n \cdot r)N,$$
$$Q + NQN = 2(n \cdot r)N,$$
$$NQN = 2(n \cdot r)N - Q.$$

Pertanto $s^2NQN = 2s^2(n \cdot r)N - s^2Q$.



Piano perpendicolare a n.
Illustrazione: $\alpha = \pi/3$.

La componente parallela all'asse viene separata attraverso il prodotto scalare n·r.

Riconoscere la formula di rotazione

Sostituiamo i due risultati nella coniugazione:

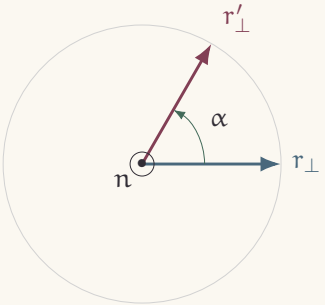
$$VQV^\dagger = (c^2 - s^2)Q + 2cs(n \times r) \cdot \sigma + 2s^2(n \cdot r)N.$$

Quindi il nuovo vettore è

$$r' = (c^2 - s^2)r + 2cs(n \times r) + 2s^2(n \cdot r)n.$$

Le identità $c^2 - s^2 = \cos\alpha$, $2cs = \sin\alpha$ e $2s^2 = 1 - \cos\alpha$ danno

$$r' = \cos\alpha\, r + \sin\alpha\,(n \times r) + (1 - \cos\alpha)(n \cdot r)n.$$



Piano perpendicolare a n.
Illustrazione: $\alpha = \pi/3$.

Questa è la formula di Rodrigues: deriva qui dalla moltiplicazione delle matrici 2 per 2.

Separare il moto parallelo e perpendicolare

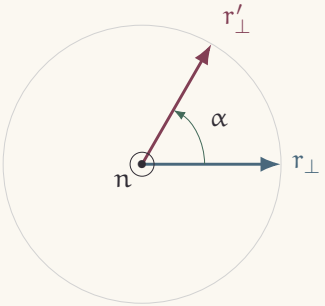
Scriviamo $r = r_{\parallel} + r_{\perp}$, con $r_{\parallel} = (n \cdot r)n$ e $n \cdot r_{\perp} = 0$.
Poiché $n \times r_{\parallel} = 0$,

$$r' = r_{\parallel} + \cos\alpha\, r_{\perp} + \sin\alpha\, (n \times r_{\perp}).$$

Per $r_{\perp} \neq 0$, i vettori $e_1 = r_{\perp}/\|r_{\perp}\|$ ed $e_2 = n \times e_1$ sono ortonormali. La parte perpendicolare è

$$r'_{\perp} = \|r_{\perp}\|(\cos\alpha\, e_1 + \sin\alpha\, e_2).$$

Essa conserva la lunghezza e ruota di α; la parte parallela rimane invariata. Se $r_{\perp} = 0$, l'intero punto è fisso.



Piano perpendicolare a n.
Illustrazione: $\alpha = \pi/3$.

Ogni unitaria a un qubit induce dunque una rotazione della sfera, mentre la fase globale resta assente dalle coordinate.

Confrontare il risultato con la formula geometrica

Riprendiamo $n = (1, 0, 0)$, $r = (0, 4/5, 3/5)$ e $\alpha = \pi/2$. Il prodotto scalare è

$$n \cdot r = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4/5 + 0 \cdot 3/5 = 0.$$

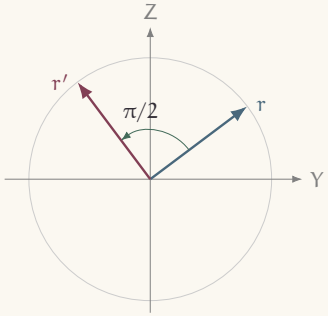
Il prodotto vettoriale dà

$$\begin{aligned} n \times r &= (0 \cdot 3/5 - 0 \cdot 4/5,\ 0 - 3/5,\ 4/5 - 0) \\ &= (0, -3/5, 4/5). \end{aligned}$$

Poiché $\cos(\pi/2) = 0$ e $\sin(\pi/2) = 1$,

$$r' = 0r + 1(n \times r) + (1 - 0)0n = (0, -3/5, 4/5).$$

Le due procedure forniscono lo stesso punto.



Piano YZ; asse +X verso il lettore.
$(0, 4/5, 3/5) \to (0, -3/5, 4/5)$

Il quarto di giro nel piano YZ coincide con la trasformazione delle ampiezze ottenuta dalla matrice.

Una rotazione calcolata sulle ampiezze

Per $n = (0, 0, 1)$:

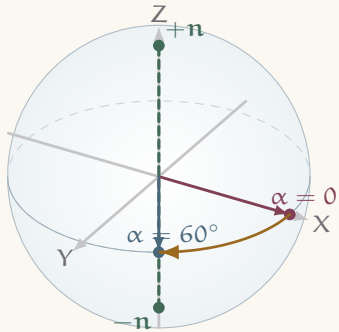
$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix}.$$

Applicando l'operatore a $|+\rangle$:

$$R_z(\alpha)\,|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} \\ e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} = e^{-i\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\alpha} \end{pmatrix}.$$

Eliminata la fase comune, il prodotto delle componenti è $c_0^* c_1 = e^{i\alpha}/2$. Ne segue

$$r' = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0).$$

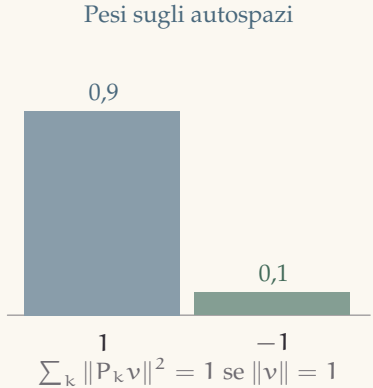


La fase relativa aumenta di α e il punto percorre l'equatore dello stesso angolo.

Capitolo 25

Autostati e decomposizione spettrale

L'operatore determina i valori possibili di una misura. I suoi autospazi individuano le preparazioni con esito certo.



Autostati: la stessa equazione già studiata

In notazione di Dirac:

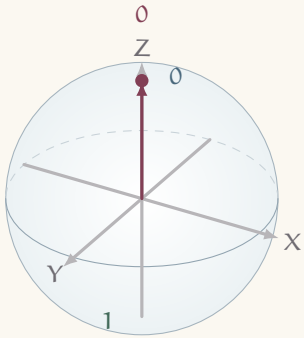
$$A\,|u_k\rangle = \lambda_k\,|u_k\rangle\,.$$

Per A hermitiana, gli autovalori sono reali e si può scegliere una base ortonormale di autostati.

Per Z:

$$Z\,|0\rangle = +\,|0\rangle\,, \qquad Z\,|1\rangle = -\,|1\rangle\,.$$

I valori dell'osservabile sono $+1$ e -1, distinti dalle etichette degli stati 0 e 1.



Sfera di Bloch: stati puri

$Z(1,0)^T = (1\cdot 1 + 0\cdot 0,\ 0\cdot 1 - 1\cdot 0)^T = (1,0)^T$; $Z(0,1)^T = (0,-1)^T = -(0,1)^T$.

Esempio: autostati di Y

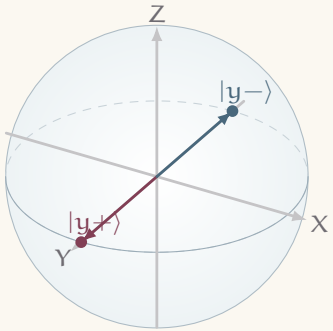
Il polinomio caratteristico è

$$\det(Y - \lambda I) = \lambda^2 - (-i)i = \lambda^2 - 1.$$

Per $\lambda = +1$: $-c_0 - ic_1 = 0$. Scegliendo $c_1 = i$, si ottiene $c_0 = 1$.

Per $\lambda = -1$: $c_0 - ic_1 = 0$. Scegliendo $c_1 = -i$, si ottiene $c_0 = 1$.

$$|y\pm\rangle = \frac{|0\rangle \pm i\,|1\rangle}{\sqrt{2}}.$$



Gli autostati sono ai due estremi dell'asse Y.

I due autostati sono i punti antipodali sull'asse Y.

Le seconde equazioni e la normalizzazione

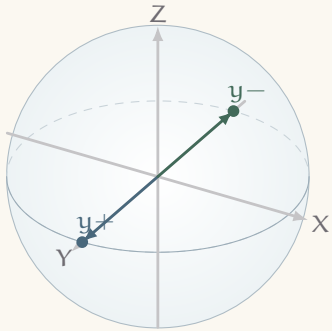
Per $\lambda = +1$, la seconda riga è $ic_0 - c_1 = 0$: con $(c_0, c_1) = (1, i)$ dà $i - i = 0$.

Per $\lambda = -1$, la seconda riga è $ic_0 + c_1 = 0$: con $(1, -i)$ dà ancora $i - i = 0$.

Le due norme quadre valgono $1 + |i|^2 = 1 + |-i|^2 = 2$; il fattore di normalizzazione è $1/\sqrt{2}$.

$$\langle y+|y-\rangle = \frac{1 \cdot 1 + (-i)(-i)}{2} = \frac{1 + i^2}{2} = 0.$$

I due autostati sono quindi ortonormali.



Il coniugio è essenziale: nel bra di $y+$ la seconda componente è $-i$.

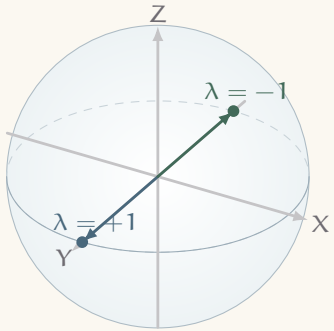
Esempio: proiettori e spettro di Y

$$P_+ = |y+\rangle\langle y+| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_- = |y-\rangle\langle y-| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

La somma è I; la differenza è

$$P_+ - P_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} = Y.$$



I prodotti esterni sono gli stessi già svolti per M: $|y+\rangle = iu_1$ e $|y-\rangle = -iu_2$, quindi i proiettori coincidono. La somma è $\frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) = I$.

Esempio: costruire un'osservabile dai risultati

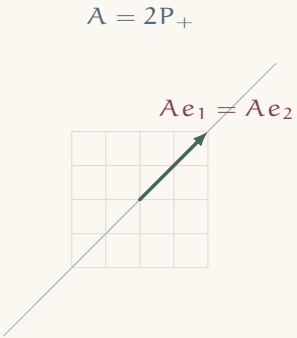
Vogliamo il valore 2 su $|+\rangle$ e il valore 0 su $|-\rangle$.

$$A = 2\,|+\rangle\langle+| + 0\,|-\rangle\langle-|\,.$$

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Controlliamo:

$$A(1,1)^{\mathsf{T}} = (1+1, 1+1)^{\mathsf{T}} = (2,2)^{\mathsf{T}},$$
$$A(1,-1)^{\mathsf{T}} = (1-1, 1-1)^{\mathsf{T}} = (0,0)^{\mathsf{T}}.$$



Grigio: prima Blu: dopo

Ogni $1+1$ deriva da $1\cdot 1 + 1\cdot 1$; ogni $1-1$ da $1\cdot 1 + 1(-1)$. Una direzione raddoppia, quella ortogonale si annulla.

Spettro degenere e traccia

In generale, sommando sugli autovalori distinti,

$$A = \sum_k \lambda_k P_k.$$

Se E_k ha dimensione d_k:

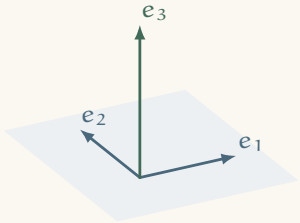
$$P_k = \sum_{j=1}^{d_k} |u_{kj}\rangle \langle u_{kj}|, \qquad \operatorname{Tr} P_k = d_k.$$

Quindi

$$\operatorname{Tr} A = \sum_k \lambda_k d_k.$$

Per $\operatorname{diag}(2,2,5)$ si ottiene $2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 9$.

Sezione reale dello spazio $\mathbb{C}^3$



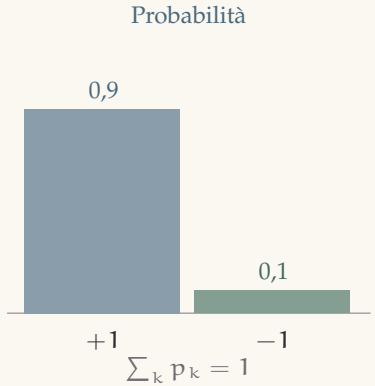
E_2: $\dim_{\mathbb{C}} E_2 = 2$
E_5: $\dim_{\mathbb{C}} E_5 = 1$

Per linearità della traccia, $\operatorname{Tr} P_k = \sum_{j=1}^{d_k} \operatorname{Tr}(|u_{kj}\rangle \langle u_{kj}|) = \sum_{j=1}^{d_k} \langle u_{kj}|u_{kj}\rangle = \sum_{j=1}^{d_k} 1 = d_k$.

Capitolo 26

Regola di Born

Lo stato determina i pesi degli autospazi. Da questi pesi segue una distribuzione di probabilità ordinaria.



Dalle componenti alle probabilità

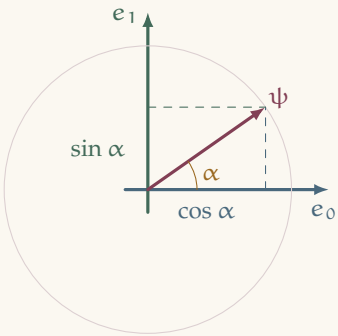
Per uno stato puro normalizzato e una misura proiettiva di $A = \sum_k \lambda_k P_k$,

$$P(\lambda_k) = \| P_k |\psi\rangle \|^2 = \langle\psi| P_k |\psi\rangle .$$

Se l'autovalore è semplice:

$$P(\lambda_k) = |\langle u_k|\psi\rangle|^2.$$

Questa è la regola di Born: collega la preparazione alle probabilità osservabili.



Piano dei coefficienti reali

La regola è un postulato fisico. L'algebra ne verifica la coerenza con la normalizzazione.

La probabilità nelle tre scritture equivalenti

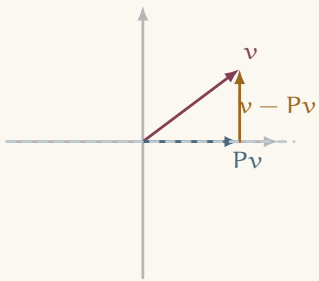
La norma quadra della componente selezionata è

$$\begin{aligned} \|P_k |\psi\rangle\|^2 &= (P_k |\psi\rangle)^\dagger (P_k |\psi\rangle) \\ &= \langle\psi| P_k^\dagger P_k |\psi\rangle \\ &= \langle\psi| P_k |\psi\rangle . \end{aligned}$$

Abbiamo usato $P_k^\dagger = P_k$ e $P_k^2 = P_k$. Se $P_k = |u_k\rangle \langle u_k|$, allora

$$\|P_k |\psi\rangle\|^2 = \| \langle u_k|\psi\rangle |u_k\rangle \|^2 = | \langle u_k|\psi\rangle |^2 \underbrace{\|u_k\|^2}_{1} .$$

La lunghezza della componente determina il peso



La componente e il residuo sono ortogonali.

Il disegno è una sezione reale; nelle ampiezze complesse la lunghezza è definita dal prodotto coniugato.

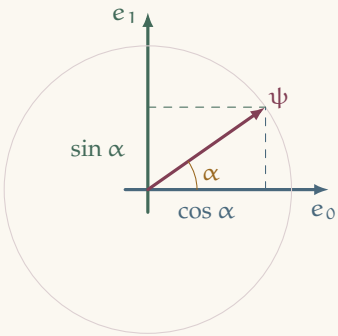
Perché i pesi sommano a uno

Ogni peso è una norma quadra, quindi è non negativo.

Usando la completezza:

$$\sum_k P(\lambda_k) = \sum_k \langle\psi| P_k |\psi\rangle$$
$$= \langle\psi| \left(\sum_k P_k \right) |\psi\rangle$$
$$= \langle\psi| I |\psi\rangle = 1.$$

Le componenti ortogonali ricostruiscono la norma quadra iniziale.



Piano dei coefficienti reali

La somma uno dipende da due condizioni: stato normalizzato e misura completa.

Esempio: misura di Z

Per $|\psi\rangle = (2|0\rangle + i|1\rangle)/\sqrt{5}$,

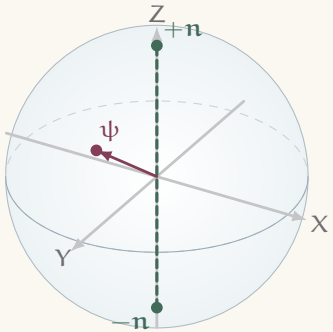
$$\langle 0|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \langle 1|\psi\rangle = \frac{i}{\sqrt{5}}.$$

Quindi

$$P_Z(+1) = \left|\frac{2}{\sqrt{5}}\right|^2 = \frac{4}{5},$$

$$P_Z(-1) = \left|\frac{i}{\sqrt{5}}\right|^2 = \frac{1}{5}.$$

La somma è $(4+1)/5 = 1$.



I pesi dipendono dai moduli delle componenti nella base di misura scelta.

Esempio: misura di X

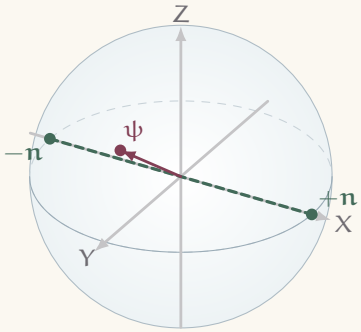
Gli autostati di X sono $|+\rangle$ e $|-\rangle$.

$$\langle +|\psi\rangle = \frac{2+i}{\sqrt{10}}, \qquad \langle -|\psi\rangle = \frac{2-i}{\sqrt{10}}.$$

$$P_X(+1) = \frac{|2+i|^2}{10} = \frac{4+1}{10} = \frac{1}{2},$$

$$P_X(-1) = \frac{|2-i|^2}{10} = \frac{4+1}{10} = \frac{1}{2}.$$

La preparazione è la stessa della misura di Z.



I prodotti con $\langle +|$ e $\langle -|$ sono stati svolti nel cambio di base: $(1 \cdot 2 \pm 1 \cdot i)/\sqrt{10} = (2 \pm i)/\sqrt{10}$.

Esempio: misura di Y

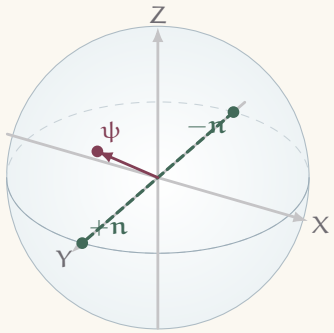
I bra degli autostati sono $(1, \mp i)/\sqrt{2}$.

$$\langle y+|\psi\rangle = \frac{2 + (-i)i}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$\langle y-|\psi\rangle = \frac{2 + i \cdot i}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Quindi

$$P_Y(+1) = \frac{9}{10}, \qquad P_Y(-1) = \frac{1}{10}.$$



$p_+ = 0.9, \quad p_- = 0.1$

$|3/\sqrt{10}|^2 = 9/10$, $|1/\sqrt{10}|^2 = 1/10$ e $(9+1)/10 = 1$: sono stati considerati entrambi gli esiti.

I proiettori della misura degenere

Per $A = \mathrm{diag}(2,2,5)$,

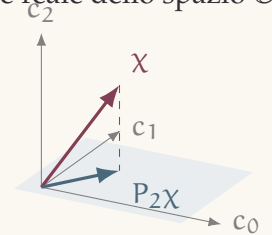
$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sul vettore $\chi = (1,2,2)^T/3$ agiscono così:

$$P_2\chi = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 2 + 0\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 2 + 0\cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per P_5, le prime due righe danno zero; la terza dà $(0\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 2)/3 = 2/3$.

Sezione reale dello spazio $\mathbb{C}^3$



$\chi = (1,2,2)/3$
$P_2\chi = (1,2,0)/3$

La misura distingue due sottospazi. Il piano dell'esito 2 conserva entrambe le sue componenti.

Esempio: una misura con degenerazione

Siano $A = \mathrm{diag}(2, 2, 5)$ e

$$|\chi\rangle = \frac{1}{3}(1, 2, 2)^{\mathsf{T}}.$$

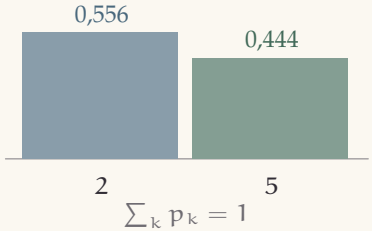
La norma quadra è $(1 + 4 + 4)/9 = 1$.

$$P_2 |\chi\rangle = \frac{1}{3}(1, 2, 0)^{\mathsf{T}}, \quad P_5 |\chi\rangle = \frac{1}{3}(0, 0, 2)^{\mathsf{T}}.$$

Le probabilità sono

$$P(2) = \frac{1+4}{9} = \frac{5}{9}, \qquad P(5) = \frac{4}{9}.$$

Due esiti, tre dimensioni



Per l'esito 2 si sommano i pesi di entrambe le direzioni del suo autospazio.

La base completa dell'analizzatore

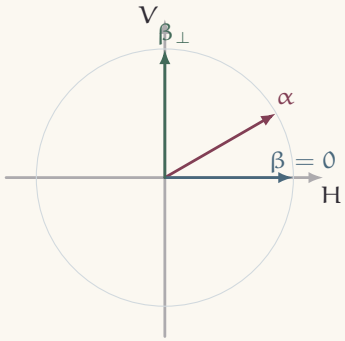
Nella base H/V, una direzione lineare a β è

$$|\beta\rangle = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}, \qquad |\beta_\perp\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Entrambi i vettori hanno norma uno e

$$\langle\beta|\beta_\perp\rangle = -\cos\beta\sin\beta + \sin\beta\cos\beta = 0.$$

Per la preparazione $|\alpha\rangle = (\cos\alpha, \sin\alpha)^T$, il prodotto $\langle\beta|\alpha\rangle$ è la componente lungo l'asse selezionato dall'analizzatore.



Il piano delle polarizzazioni lineari

La differenza $\alpha - \beta$ è l'angolo fra le due direzioni del piano H/V.

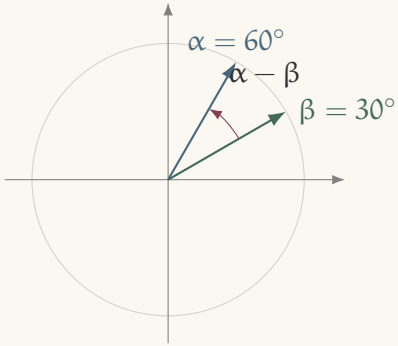
Svolgere il prodotto delle due fasi

Poniamo $c_\alpha = \cos\alpha$, $s_\alpha = \sin\alpha$ e analogamente per β. Dalla legge degli esponenziali:

$$e^{i(\alpha-\beta)} = (c_\alpha + is_\alpha)(c_\beta - is_\beta).$$

Svolgendo i quattro prodotti e usando $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha-\beta)} &= c_\alpha c_\beta - ic_\alpha s_\beta + is_\alpha c_\beta + s_\alpha s_\beta \\ &= (c_\alpha c_\beta + s_\alpha s_\beta) \\ &\quad + i(s_\alpha c_\beta - c_\alpha s_\beta). \end{aligned}$$



La differenza degli angoli diventa una combinazione delle coordinate dei due punti sulla circonferenza.

Ricavare le identità di differenza

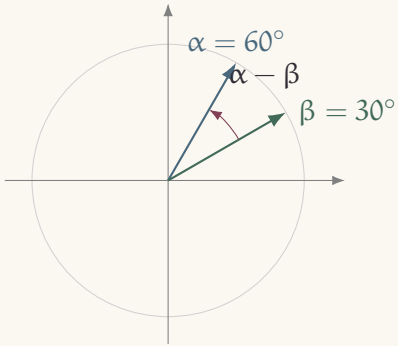
La formula di Eulero scrive lo stesso numero come $\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)$. Uguagliando le parti reali:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta.$$

Uguagliando le parti immaginarie:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta.$$

Con $\beta = \alpha$, la prima identità restituisce $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$.



Le due identità permettono di esprimere le componenti rispetto agli assi dell'analizzatore.

Esempio: Born e polarizzazione lineare

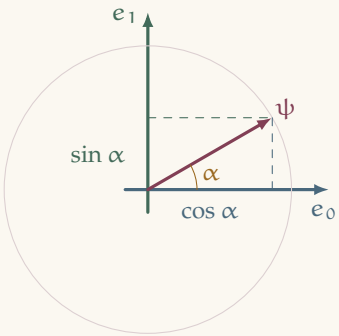
Una preparazione lineare a α e un analizzatore a β hanno coefficienti reali.

$$\begin{aligned}\langle \beta | \alpha \rangle &= \cos\beta \cos\alpha + \sin\beta \sin\alpha \\ &= \cos(\alpha - \beta).\end{aligned}$$

Quindi $P = \cos^2(\alpha - \beta)$.

Per $\alpha = 30°$, $\beta = 0$:

$$P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$



Piano dei coefficienti reali

È la stessa dipendenza osservata nella lezione precedente, ora ricavata dal prodotto interno.

Calcolare anche l'uscita ortogonale

Le identità di differenza appena dimostrate danno

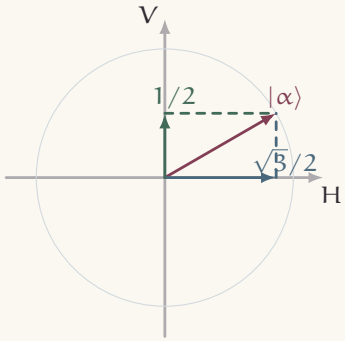
$$\langle \beta | \alpha \rangle = \cos(\alpha - \beta),$$

$$\langle \beta_\perp | \alpha \rangle = -\sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha = \sin(\alpha - \beta).$$

Per $\alpha = 30°$, $\beta = 0$:

$$P_{\parallel} = (\sqrt{3}/2)^2 = 3/4, \qquad P_\perp = (1/2)^2 = 1/4.$$

La somma vale $3/4 + 1/4 = 1$, come richiesto da una misura completa.



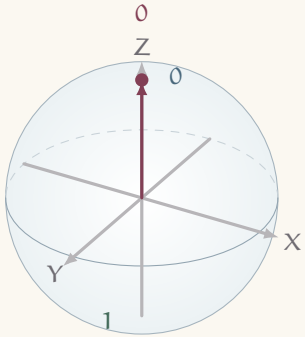
Le due proiezioni e le loro lunghezze

Le probabilità sono i quadrati delle lunghezze delle due componenti.

Capitolo 27

Misura e aggiornamento dello stato

Il risultato seleziona un autospazio. Per prevedere una seconda misura occorre conoscere anche lo stato che rimane.



Sfera di Bloch: stati puri

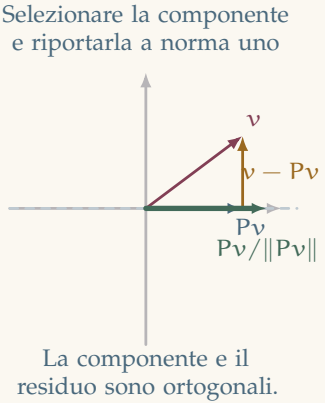
Proiezione e rinormalizzazione

Per una misura proiettiva ideale, ottenuto l'esito λ_k con probabilità non nulla,

$$|\psi'\rangle = \frac{P_k\,|\psi\rangle}{\sqrt{P(\lambda_k)}}.$$

La prima operazione seleziona la componente; la divisione la riporta a norma uno.

Per un autovalore semplice lo stato risultante è l'autostato corrispondente, a meno di fase globale.



Per $p_k > 0$, $\|\psi'\|^2 = \|P_k\psi\|^2/p_k = p_k/p_k = 1$. Adottiamo la misura proiettiva ideale che conserva la combinazione interna all'autospazio selezionato.

Esempio: dopo l'esito +1 di Y

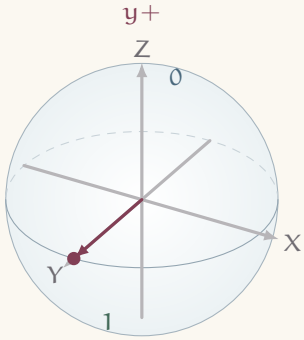
Abbiamo $\langle y+|\psi\rangle = 3/\sqrt{10}$.

$$P_+ |\psi\rangle = |y+\rangle \langle y+|\psi\rangle = \frac{3}{\sqrt{10}} |y+\rangle .$$

La norma è $3/\sqrt{10}$. Quindi

$$|\psi'\rangle = \frac{(3/\sqrt{10})\,|y+\rangle}{3/\sqrt{10}} = |y+\rangle .$$

Una nuova misura di Y dà $+1$ con probabilità uno.



Sfera di Bloch: stati puri

La ripetibilità vale se la seconda misura è immediata e non intervengono altre trasformazioni.

Dopo l'esito -1 di Y

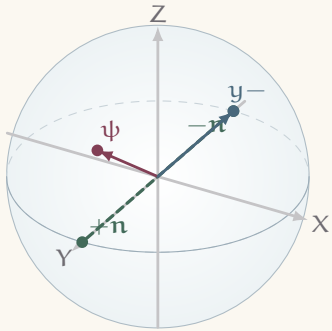
Per il secondo esito abbiamo $\langle y- | \psi \rangle = 1/\sqrt{10}$, quindi

$$P_- |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} |y-\rangle , \qquad \|P_- \psi\|^2 = \frac{1}{10}.$$

Dividendo per la norma:

$$|\psi'_-\rangle = \frac{(1/\sqrt{10})\,|y-\rangle}{1/\sqrt{10}} = |y-\rangle .$$

Una nuova misura di Y dà $P(-1) = |\langle y- | y- \rangle|^2 = 1$ e $P(+1) = |\langle y+ | y- \rangle|^2 = 0$.



I due rami hanno probabilità 9/10 e 1/10; ciascuno conduce al proprio autostato.

Esempio: aggiornamento dentro un autospazio

Riprendiamo $A = \mathrm{diag}(2,2,5)$ e $\chi = (1,2,2)^{\mathsf{T}}/3$.

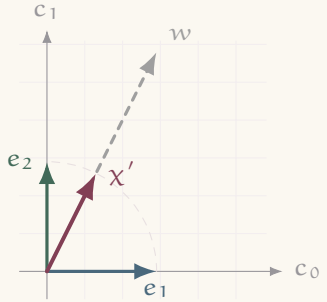
Dopo l'esito 2:

$$|\chi'\rangle = \frac{(1,2,0)^{\mathsf{T}}/3}{\sqrt{5/9}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)^{\mathsf{T}}.$$

La misura conserva la combinazione delle prime due componenti.

$$A\,|\chi'\rangle = 2\,|\chi'\rangle\,.$$

Sezione reale $c_2 = 1$ in $\mathbb{C}^3$.



$w = (1,2,0)^{\mathsf{T}}$

$\chi' = w/\sqrt{5}, \quad \|\chi'\| = 1$

$A(1,2,0)^{\mathsf{T}}/\sqrt{5} = (2\cdot 1,\ 2\cdot 2,\ 5\cdot 0)^{\mathsf{T}}/\sqrt{5} = 2(1,2,0)^{\mathsf{T}}/\sqrt{5}$; la norma quadra è $(1+4)/5 = 1$.

Anche l'esito 5 ha uno stato successivo

Per l'altro sottospazio,

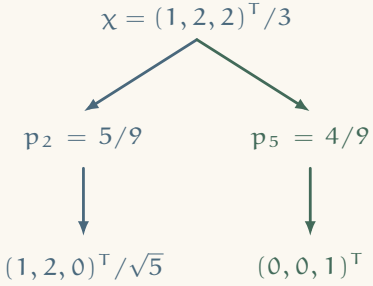
$$P_5 |\chi\rangle = \frac{1}{3}(0,0,2)^\mathsf{T}, \qquad p_5 = \frac{0+0+4}{9} = \frac{4}{9}.$$

La norma è $\sqrt{4/9} = 2/3$, dunque

$$|\chi_5'\rangle = \frac{(0,0,2)^\mathsf{T}/3}{2/3} = (0,0,1)^\mathsf{T}.$$

Il controllo dà $A(0,0,1)^\mathsf{T} = (0,0,5)^\mathsf{T} = 5(0,0,1)^\mathsf{T}$. La misura immediatamente ripetuta restituisce 5 con probabilità uno.

I due rami iniziali sommano a $5/9 + 4/9 = 1$.



Entrambi gli stati finali sono normalizzati.

Per l'esito 2 resta un vettore nel piano; per l'esito 5 resta il vettore lungo la terza direzione.

Esempio: preparare $|0\rangle$ e misurare Z

Partiamo da $|0\rangle$. Poiché

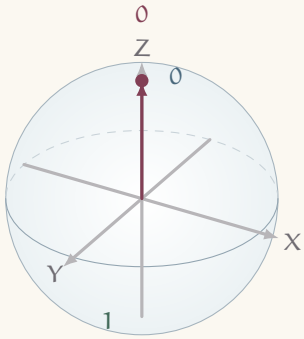
$$Z|0\rangle = +|0\rangle,$$

la prima misura dà $+1$ con certezza e lascia lo stato $|0\rangle$.

Ripetendo subito Z:

$$P(+1) = |\langle 0|0\rangle|^2 = 1,$$
$$P(-1) = |\langle 1|0\rangle|^2 = 0.$$

Inseriamo ora una misura diversa fra le due.



Sfera di Bloch: stati puri

$\langle 0|0\rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$ e $\langle 1|0\rangle = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$: i moduli quadri sono 1 e 0.

Esempio: inserire una misura di X

Per la preparazione $|0\rangle$,

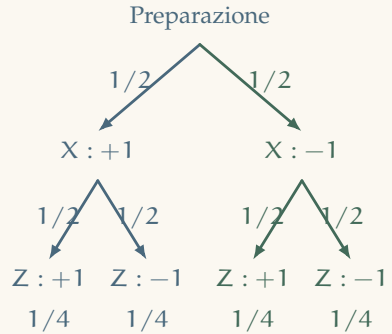
$$\langle +|0\rangle = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\langle -|0\rangle = \frac{1\cdot 1 - 1\cdot 0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

I due proiettori producono

$$P_\pm |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\pm\rangle, \qquad p_\pm = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}.$$

Per entrambi i rami, dividendo per $\sqrt{1/2} = 1/\sqrt{2}$, lo stato successivo è $|\pm\rangle$. La ricostruzione iniziale è $|0\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$.



Si moltiplicano i pesi lungo ogni percorso.

La figura anticipa le due possibili misure finali di Z; ogni percorso avrà probabilità congiunta 1/4.

Le quattro ampiezze della misura finale

Dal ramo $|+\rangle$:

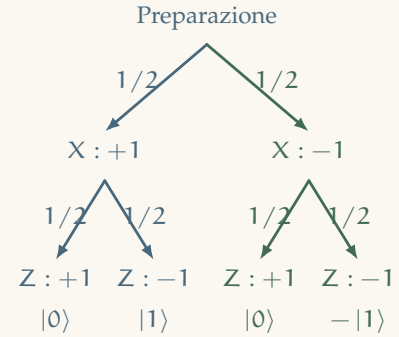
$$\langle 0|+\rangle = \frac{1\cdot 1 + 0\cdot 1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\langle 1|+\rangle = \frac{0\cdot 1 + 1\cdot 1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dal ramo $|-\rangle$:

$$\langle 0|-\rangle = \frac{1\cdot 1 + 0(-1)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\langle 1|-\rangle = \frac{0\cdot 1 + 1(-1)}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Si moltiplicano i pesi lungo ogni percorso.

I quattro moduli quadri valgono $1/2$. Moltiplicando per il peso del ramo intermedio, ogni coppia di esiti ha probabilità $(1/2)(1/2) = 1/4$.

Esempio: chiudere la sequenza $Z \to X \to Z$

Da $|\pm\rangle$:

$$|\langle 0|\pm\rangle|^2 = |\langle 1|\pm\rangle|^2 = \frac{1}{2}.$$

Per la probabilità totale:

$$\begin{aligned} P(Z=+1) &= P(X=+1)\frac{1}{2} + P(X=-1)\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Anche $P(Z=-1) = 1/2$.

Senza la misura intermedia, il risultato sarebbe rimasto certo.

Ultima misura di Z



La distribuzione finale mostra l'effetto della misura intermedia sullo stato.

Normalizzare gli stati dei quattro percorsi

La proiezione finale seleziona una sola componente:

$$P_0 |+\rangle = \frac{|0\rangle}{\sqrt{2}}, \quad P_1 |+\rangle = \frac{|1\rangle}{\sqrt{2}},$$
$$P_0 |-\rangle = \frac{|0\rangle}{\sqrt{2}}, \quad P_1 |-\rangle = -\frac{|1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Ogni vettore ha norma $1/\sqrt{2}$. Dopo la divisione rimangono rispettivamente $|0\rangle, |1\rangle, |0\rangle, -|1\rangle$.

Raggruppando i percorsi:

$$P(Z = +1) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2},$$
$$P(Z = -1) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}.$$

Pesi congiunti dei quattro percorsi

	$Z=+1$	$Z=-1$	
$X=+1$	1/4	1/4	1/2
$X=-1$	1/4	1/4	1/2
	1/2	1/2	

Somme marginali

La distribuzione finale si ottiene sommando i rami che conducono allo stesso esito di Z.

Condizionamento classico e misura quantistica

Il condizionamento classico aggiorna una distribuzione dopo un'informazione.

La misura proiettiva aggiorna lo stato mediante un proiettore, e ciò cambia in generale le previsioni per osservabili diverse.

La sola somiglianza fra "selezionare e normalizzare" non rende equivalenti le due descrizioni. La sequenza appena calcolata mostra perché occorre specificare anche quale misura è stata eseguita.



Una discussione dei modelli classici alternativi richiede ipotesi ulteriori; non segue dalla sola formula di aggiornamento.

Misurare un autovalore degenere

Per una misura proiettiva ideale di Lüders, l'esito 2 di $D = \mathrm{diag}(2,2,5)$ usa $P_2 = \mathrm{diag}(1,1,0)$. Scegliamo $\psi = (1,1,1)^{\mathsf{T}}/\sqrt{3}$:

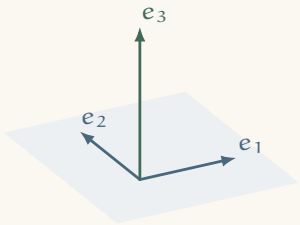
$$P_2\psi = (1,1,0)^{\mathsf{T}}/\sqrt{3},$$

$$p(2) = \|P_2\psi\|^2 = (1+1+0)/3 = 2/3,$$

$$\psi_2 = \frac{(1,1,0)^{\mathsf{T}}}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{(1,1,0)^{\mathsf{T}}}{\sqrt{2}}.$$

La coerenza fra le prime due componenti è conservata dalla misura ideale di questo autovalore.

Sezione reale dello spazio $\mathbb{C}^3$



E_2: $\dim_{\mathbb{C}} E_2 = 2$
E_5: $\dim_{\mathbb{C}} E_5 = 1$

Un apparato che distingua anche e_1 da e_2 richiede una specifica ulteriore; può modificare la coerenza nel piano.

Il secondo esito completa la misura

Per lo stesso stato $\psi = (1,1,1)^T/\sqrt{3}$ e $P_5 = \mathrm{diag}(0,0,1)$:

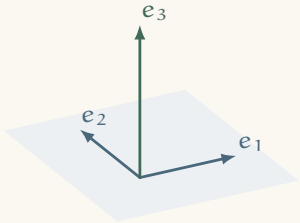
$$P_5\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\cdot 1\\ 0\cdot 1\\ 1\cdot 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$$p(5) = \frac{0^2+0^2+1^2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\psi_5 = \frac{P_5\psi}{\sqrt{1/3}} = \frac{(0,0,1)^T}{\sqrt{3}}\sqrt{3} = e_3.$$

Le probabilità coprono tutti gli esiti: $2/3 + 1/3 = 1$.

Sezione reale dello spazio $\mathbb{C}^3$



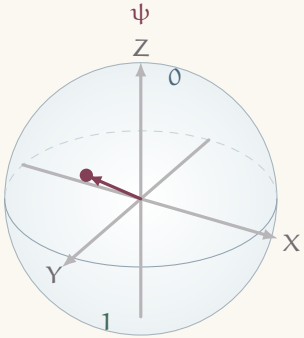
E_2: $\dim_{\mathbb{C}} E_2 = 2$
E_5: $\dim_{\mathbb{C}} E_5 = 1$

La normalizzazione dello stato condizionato divide per la radice della probabilità dell'esito.

Capitolo 28

Valori medi e dispersioni quantistiche

La distribuzione degli esiti si studia con gli strumenti della probabilità. Il formalismo offre anche una via diretta, senza diagonalizzare.



Sfera di Bloch: stati puri

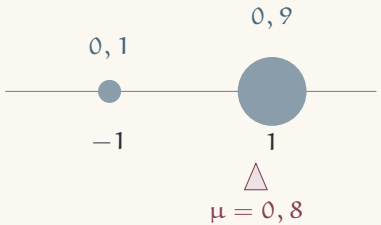
Derivare il valore medio

Dalla regola di Born:

$$\begin{aligned}\langle A\rangle_\psi &= \sum_k \lambda_k P(\lambda_k)\\ &= \sum_k \lambda_k \langle\psi| P_k |\psi\rangle\\ &= \langle\psi| \left(\sum_k \lambda_k P_k\right) |\psi\rangle\\ &= \langle\psi| A |\psi\rangle\,.\end{aligned}$$

Il calcolo diretto usa matrice e stato; la via spettrale usa esiti e probabilità.

La media come baricentro



Pesi sopra i punti; aree proporzionali

Il valore medio è una proprietà della coppia stato-osservabile, non del solo spettro.

Esempio: media di Y per due vie

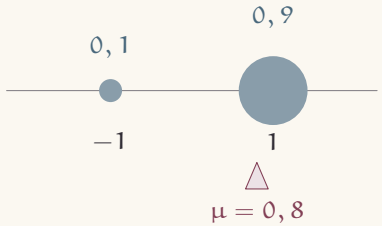
Sappiamo che $Y\psi = (1, 2i)^T/\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned}\langle\psi|\, Y\,|\psi\rangle &= \frac{1}{5}(2, -i)\begin{pmatrix}1\\ 2i\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{5}[2 + (-i)(2i)]\\ &= \frac{2+2}{5} = \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

Dalla distribuzione:

$$\langle Y\rangle = (+1)\frac{9}{10} + (-1)\frac{1}{10} = \frac{4}{5}.$$

La media come baricentro



Pesi sopra i punti; aree proporzionali

Il baricentro si trova in $4/5$, vicino all'esito più probabile $+1$.

La dispersione di una misura

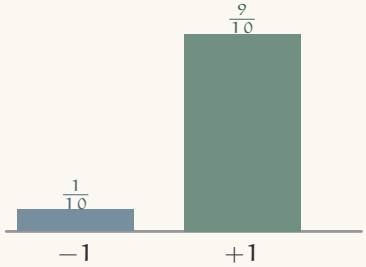
Per una preparazione ψ, indichiamo con $\langle A \rangle_\psi$ la media degli esiti. La varianza e la deviazione standard si scrivono

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle_\psi - \langle A \rangle_\psi^2, \qquad \Delta A = \sqrt{(\Delta A)^2}.$$

Sono le stesse quantità definite nella parte probabilistica, applicate alla distribuzione di Born.

Il momento secondo si calcola con A^2 perché $A^2 = \sum_k \lambda_k^2 P_k$: i valori vengono elevati al quadrato e i pesi restano gli stessi.

Distribuzione della misura di Y



Media $4/5$: gli scarti sono $-9/5$ e $1/5$.

Le dispersioni riguardano molte prove sulla stessa preparazione; ΔA non indica un singolo errore di lettura.

Esempio: varianza e scarto di Y

Poiché $Y^2 = I$,

$$\langle Y^2 \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1.$$

$$(\Delta Y)^2 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}.$$

$$\Delta Y = \frac{3}{5}.$$

Dalla distribuzione, lo stesso momento secondo è

$$(+1)^2 \frac{9}{10} + (-1)^2 \frac{1}{10} = 1.$$



Pesi sopra i punti; aree proporzionali

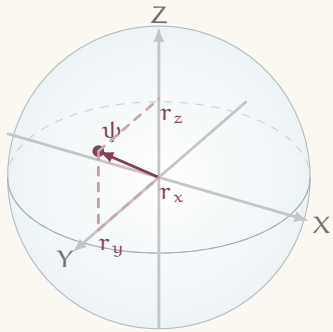
La dispersione è diversa da zero perché lo stato non è un autostato di Y.

Perché le coordinate di Bloch sono valori medi

Per $\psi = (c_0, c_1)^T$, le azioni delle tre matrici danno

$$\langle X \rangle = c_0^* c_1 + c_1^* c_0 = 2\Re(c_0^* c_1) = r_x,$$
$$\langle Y \rangle = -ic_0^* c_1 + ic_1^* c_0 = 2\Im(c_0^* c_1) = r_y,$$
$$\langle Z \rangle = c_0^* c_0 - c_1^* c_1 = |c_0|^2 - |c_1|^2 = r_z.$$

Nella seconda riga, posto $q = c_0^* c_1 = a + ib$, si usa $-iq + iq^* = -i(a + ib) + i(a - ib) = 2b$.



Ogni coordinata è il baricentro dei due esiti $+1, -1$ della misura corrispondente.

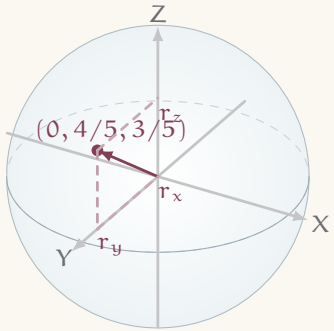
Esempio: le tre componenti della sfera

Usiamo le probabilità già calcolate:

$$\langle X\rangle = (+1)\tfrac{1}{2} + (-1)\tfrac{1}{2} = 0,$$
$$\langle Y\rangle = (+1)\tfrac{9}{10} + (-1)\tfrac{1}{10} = \tfrac{4}{5},$$
$$\langle Z\rangle = (+1)\tfrac{4}{5} + (-1)\tfrac{1}{5} = \tfrac{3}{5}.$$

Poiché i tre quadrati sono I, i momenti secondi valgono uno. Quindi

$$\Delta X = \sqrt{1-0^2} = 1,$$
$$\Delta Y = \sqrt{1-\tfrac{16}{25}} = \sqrt{\tfrac{9}{25}} = \tfrac{3}{5},$$
$$\Delta Z = \sqrt{1-\tfrac{9}{25}} = \sqrt{\tfrac{16}{25}} = \tfrac{4}{5}.$$



La geometria della sfera raccoglie le medie delle tre misure; le dispersioni si ricavano dalle stesse coordinate.

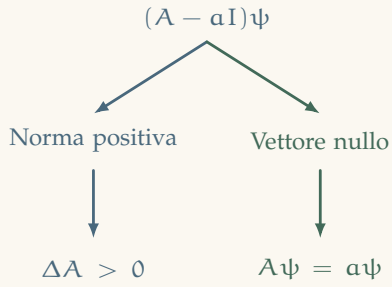
Dalla varianza a una norma quadra

Poniamo $a = \langle A \rangle$, che è reale perché A è hermitiana. Sviluppiamo:

$$\begin{aligned}\langle (A - aI)^2 \rangle &= \langle A^2 - 2aA + a^2 I \rangle \\ &= \langle A^2 \rangle - 2a\langle A \rangle + a^2 \\ &= \langle A^2 \rangle - a^2 = (\Delta A)^2.\end{aligned}$$

Inoltre $(A - aI)^\dagger = A - aI$, perciò

$$\begin{aligned}\|(A - aI)\psi\|^2 &= \psi^\dagger (A - aI)^\dagger (A - aI)\psi \\ &= \langle (A - aI)^2 \rangle.\end{aligned}$$



La certezza corrisponde all'annullamento del residuo.

Una norma quadra è zero esattamente quando il suo vettore è nullo.

Quando una misura è certa

Per $a = \langle A \rangle$,

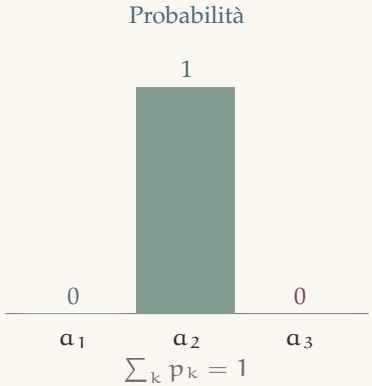
$$(\Delta A)^2 = \langle \psi | (A - aI)^2 | \psi \rangle$$
$$= \| (A - aI) | \psi \rangle \|^2.$$

La varianza è zero se e solo se

$$(A - aI) | \psi \rangle = 0.$$

Quindi lo stato è un autostato di A.

In presenza di degenerazione può essere qualsiasi vettore normalizzato dell'autospazio selezionato.

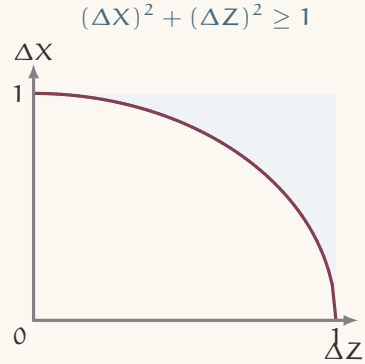


Esito certo significa concentrazione su un valore, non necessariamente su un unico vettore della base.

Capitolo 29

Osservabili incompatibili

Le basi di misura possono essere diverse. Il commutatore e le dispersioni descrivono aspetti distinti di questa incompatibilità.



Qubit: frontiera dei valori ammessi

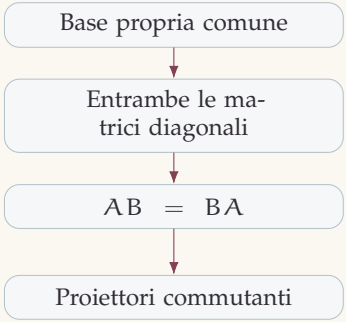
Compatibilità e base comune

Due osservabili hermitiane in dimensione finita ammettono una base comune di autostati se e solo se

$$[A, B] = 0.$$

Nella base comune entrambi gli operatori sono diagonali, quindi $AB = BA$.

Per misure proiettive ideali con proiettori commutanti, le probabilità congiunte non dipendono dall'ordine.



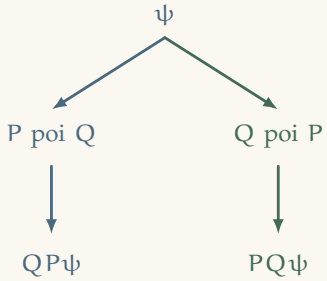
L'esistenza di una base propria comune per hermitiane commutanti è il teorema dimostrato nella parte algebrica.

Confrontare i due ordini di misura

Siano P e Q due proiettori di osservabili compatibili, con $PQ = QP$. Misurando prima P, poi Q, il peso congiunto è

$$p(P, Q) = \|P\psi\|^2 \left\| Q \frac{P\psi}{\|P\psi\|} \right\|^2 = \|QP\psi\|^2.$$

Nell'altro ordine si ottiene $p(Q, P) = \|PQ\psi\|^2$. I due vettori coincidono, quindi coincidono probabilità e stato finale normalizzato. Se un ramo ha probabilità zero, anche il suo peso congiunto è zero.



Per $PQ = QP$ le due proiezioni coincidono.

Questa conclusione riguarda il modello di misura proiettiva ideale adottato nel modulo.

Leggere i termini della disuguaglianza

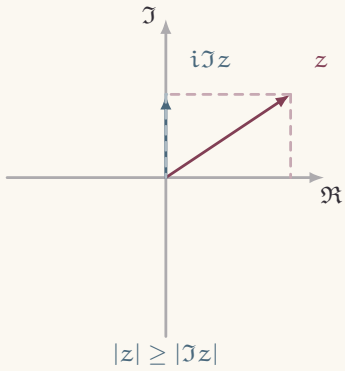
Con $\widetilde{A} = A - \langle A \rangle I$ e $\widetilde{B} = B - \langle B \rangle I$,

$$\begin{aligned} z = \langle \widetilde{A}\psi, \widetilde{B}\psi \rangle &= (\widetilde{A}\psi)^\dagger \widetilde{B}\psi \\ &= \psi^\dagger \widetilde{A}^\dagger \widetilde{B}\psi \\ &= \psi^\dagger \widetilde{A}\widetilde{B}\psi. \end{aligned}$$

Le norme dei due vettori sono ΔA e ΔB per l'identità appena dimostrata. Per $z = x + iy$,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y| = |\Im z|.$$

La seconda disuguaglianza è dunque una relazione fra lunghezze nel piano complesso.



La prima disuguaglianza della prova è Cauchy–Schwarz, applicata ai due vettori degli scarti.

Derivare il limite di Robertson

Poniamo $a = \langle A \rangle$, $b = \langle B \rangle$ e

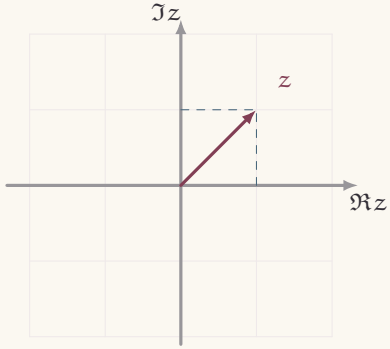
$$\widetilde{A} = A - aI, \qquad \widetilde{B} = B - bI.$$

Per $u = \widetilde{A}\psi$ e $v = \widetilde{B}\psi$,

$$\|u\|^2 = \langle \widetilde{A}^2 \rangle = (\Delta A)^2, \quad \|v\|^2 = (\Delta B)^2.$$

L'hermitianità dà $z = \langle u, v \rangle = \langle \widetilde{A}\widetilde{B} \rangle$. Da Cauchy–Schwarz e da $|z| \geq |\Im z|$:

$$\Delta A \Delta B = \|u\| \, \|v\| \geq |z| \geq |\Im z|.$$



Piano complesso

La distanza del punto dall'origine è almeno il valore assoluto della sua coordinata immaginaria.

Robertson: dalla parte immaginaria al commutatore

Poiché $\widetilde{A}$ e $\widetilde{B}$ sono hermitiani,

$$z^* = \langle (\widetilde{A}\widetilde{B})^\dagger \rangle = \langle \widetilde{B}\widetilde{A} \rangle.$$

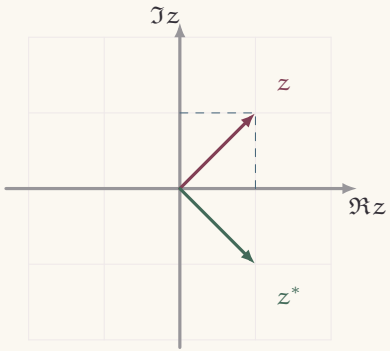
Sottraendo il coniugato:

$$2i\,\Im z = z - z^* = \langle [\widetilde{A}, \widetilde{B}] \rangle.$$

I termini con le medie si cancellano:

$$\begin{aligned}[\widetilde{A}, \widetilde{B}] &= (AB - bA - aB + abI) \\ &\quad - (BA - aB - bA + abI) \\ &= AB - BA = [A, B].\end{aligned}$$

Quindi $|\Im z| = \frac{1}{2}|\langle [A, B] \rangle|$.



Piano complesso

$z^* = (\psi^\dagger \widetilde{A}\widetilde{B}\psi)^* = \psi^\dagger \widetilde{B}\widetilde{A}\psi$. Prendendo i moduli di $2i\,\Im z$, si usa $|i| = 1$: $|\Im z| = |\langle [A, B] \rangle|/2$.

Il limite dipende dalla preparazione

Otteniamo

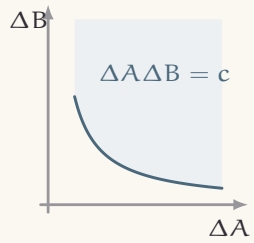
$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle_\psi|.$$

Il membro di destra dipende dallo stato.

Può annullarsi anche se gli operatori non commutano: in quel caso questa disuguaglianza non fornisce un limite positivo.

Le dispersioni riguardano serie di misure su copie preparate nello stesso stato.

Stato fissato, limite fissato



$c = \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$

Il disegno illustra il vincolo sul prodotto per un valore positivo fissato di c; la regione sopra la curva soddisfa la disuguaglianza. Le coppie fisicamente realizzabili possono avere ulteriori vincoli.

I due prodotti prima della sottrazione

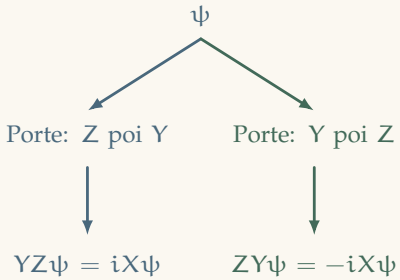
Svolgiamo le righe per le colonne:

$$YZ = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + (-i)0 & 0\cdot 0 + (-i)(-1) \\ i\cdot 1 + 0\cdot 0 & i\cdot 0 + 0(-1) \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

$$ZY = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 0i & 1(-i) + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + (-1)i & 0(-i) + (-1)0 \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$



Le due uscite differiscono per una fase globale: descrivono lo stesso stato.

Le figure rappresentano porte unitarie. Le misure successive richiedono proiettori e probabilità condizionate.

Esempio: calcolare $[Y, Z]$

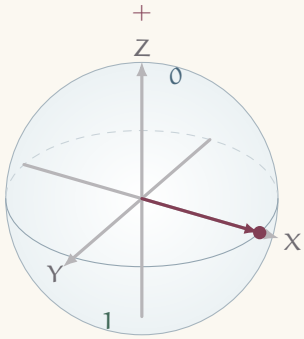
$$YZ = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad ZY = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Sottraendo:

$$[Y, Z] = \begin{pmatrix} 0 & i-(-i) \\ i-(-i) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} = 2iX.$$

Il limite diventa

$$\Delta Y \Delta Z \geq \frac{1}{2}|2i\langle X\rangle| = |\langle X\rangle|.$$



Sfera di Bloch: stati puri

Per questa coppia, è la coordinata X dello stato a determinare il limite inferiore di Robertson.

Misurare prima Z e poi Y

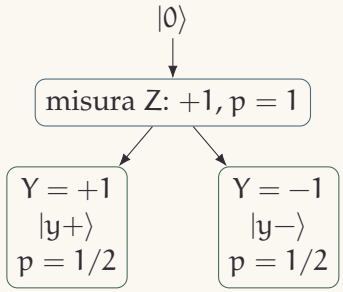
Prepariamo $|0\rangle$. Usiamo $P_+ = |0\rangle\langle 0|$, $P_- = |1\rangle\langle 1|$ e $Q_\pm = |y\pm\rangle\langle y\pm|$, con $|y\pm\rangle = (|0\rangle \pm i|1\rangle)/\sqrt{2}$. Poiché $P_+|0\rangle = |0\rangle$ e $P_-|0\rangle = 0$, $Z = +1$ è certo.

$$Q_\pm P_+ |0\rangle = |y\pm\rangle\langle y\pm|0\rangle = \frac{|y\pm\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$p(Z+, Y\pm) = \| Q_\pm P_+ |0\rangle \|^2 = \frac{1}{2},$$

$$p(Z-, Y\pm) = \| Q_\pm P_- |0\rangle \|^2 = 0.$$

I rami non nulli, divisi per $\sqrt{1/2}$, danno $|y\pm\rangle$. I pesi sommano a $1/2 + 1/2 + 0 + 0 = 1$.



Albero delle misure ideali.
Le foglie riportano pesi congiunti.

I rami nulli non vengono normalizzati. La misura finale di Y prepara uno dei suoi due autostati.

Invertire l'ordine delle due misure

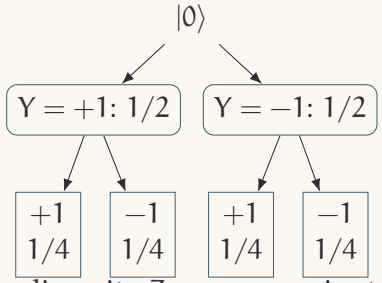
Misurando prima Y, i due rami $Q_s|0\rangle = |y_s\rangle/\sqrt{2}$ hanno peso $1/2$, per $s = \pm 1$. Sullo stato normalizzato $|y_s\rangle = (|0\rangle + si|1\rangle)/\sqrt{2}$:

$$P_+|y_s\rangle = \frac{|0\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad P_-|y_s\rangle = \frac{si|1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

I pesi condizionati sono $|1/\sqrt{2}|^2 = |si/\sqrt{2}|^2 = 1/2$, quindi

$$p(Y = s, Z = t) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad (s, t = \pm 1).$$

I pesi sommano a $4/4 = 1$. Gli stati finali sono $|0\rangle$ e $si|1\rangle$, autostati di Z.



Foglie: esito Z e peso congiunto. Per Z+, Y+: 1/4 in questo ordine; 1/2 misurando Z per primo.

L'ordine delle misure modifica probabilità congiunte e stati finali.

Le tre operazioni sullo stato +

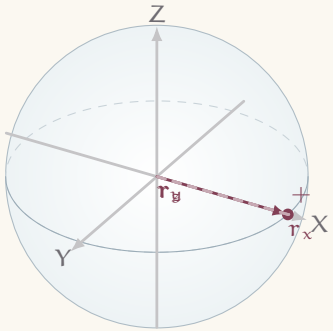
Le azioni matriciali sono

$$X|+\rangle = \frac{(1,1)^T}{\sqrt{2}},$$

$$Y|+\rangle = \frac{(-i,i)^T}{\sqrt{2}},$$

$$Z|+\rangle = \frac{(1,-1)^T}{\sqrt{2}}.$$

Le tre colonne risultanti sono gli ingressi dei prodotti con il bra della preparazione. Calcoliamo nella pagina successiva le medie e le dispersioni.



Le matrici X, Y, Z agiscono sulle due ampiezze secondo le regole già ricavate.

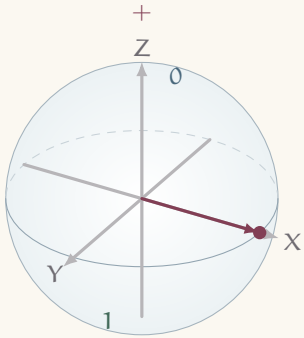
Esempio: saturazione nello stato $|+\rangle$

Moltiplichiamo ogni risultato per $\langle +| = (1,1)/\sqrt{2}$:

$$\langle X\rangle_+ = (1\cdot 1 + 1\cdot 1)/2 = 1,$$
$$\langle Y\rangle_+ = (1(-i) + 1i)/2 = 0,$$
$$\langle Z\rangle_+ = (1\cdot 1 + 1(-1))/2 = 0.$$

Poiché $\langle Y^2\rangle = \langle Z^2\rangle = 1$, le due varianze sono $1 - 0^2 = 1$.

$$\Delta Y \Delta Z = 1 = |\langle X\rangle|.$$



Sfera di Bloch: stati puri

Il valore 1 non è un limite universale per tutti gli stati.

Le tre operazioni sullo stato $y+$

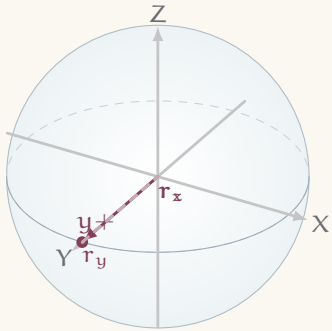
Sul ket $(1, i)^T/\sqrt{2}$:

$$X|y+\rangle = \frac{(i, 1)^T}{\sqrt{2}},$$

$$Y|y+\rangle = \frac{(1, i)^T}{\sqrt{2}},$$

$$Z|y+\rangle = \frac{(1, -i)^T}{\sqrt{2}}.$$

Le tre colonne risultanti sono gli ingressi dei prodotti con il bra della preparazione. Calcoliamo nella pagina successiva le medie e le dispersioni.



Le matrici X, Y, Z agiscono sulle due ampiezze secondo le regole già ricavate.

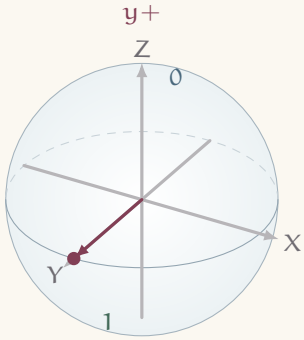
Esempio: lo stesso limite in un altro stato

Con il bra $(1, -i)/\sqrt{2}$:

$$\langle X \rangle = (i - i)/2 = 0,$$
$$\langle Y \rangle = (1 + (-i)i)/2 = (1 + 1)/2 = 1,$$
$$\langle Z \rangle = (1 + (-i)(-i))/2 = (1 - 1)/2 = 0.$$

Quindi $\Delta Y = \sqrt{1 - 1^2} = 0$ e $\Delta Z = \sqrt{1 - 0^2} = 1$.

$$\Delta Y \Delta Z = 0 = |\langle X \rangle|.$$



Sfera di Bloch: stati puri

Per Pauli diverse nessuno stato è autostato di entrambe, anche quando il limite di Robertson è nullo.

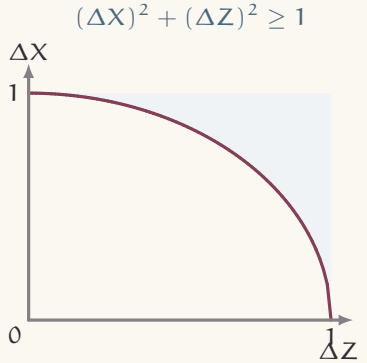
Una lettura geometrica per X e Z

Per gli stati puri studiati qui, $r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1$.
Perciò

$$\begin{aligned}(\Delta X)^2 + (\Delta Z)^2 &= 2 - r_x^2 - r_z^2 \\ &= 2 - (1 - r_y^2) = 1 + r_y^2 \\ &\geq 1.\end{aligned}$$

Ogni deviazione è fra 0 e 1, perché $\Delta X = \sqrt{1 - r_x^2}$ e $\Delta Z = \sqrt{1 - r_z^2}$.

L'uguaglianza richiede $r_y = 0$: il punto si trova nel piano XZ. Le due dispersioni non possono annullarsi insieme.



Qubit: frontiera dei valori ammessi

Gli assi riportano le deviazioni standard. Nel quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ è ammessa la regione sopra l'arco $(\Delta X)^2 + (\Delta Z)^2 = 1$.

Capitolo 30

Sistemi composti

Le quattro ampiezze descrivono la coppia. Non sempre possono essere ricostruite a partire da due stati separati.

	Secondo indice 0	1
0	$1/\sqrt{2}$	0
1	0	$1/\sqrt{2}$

Ampiezze delle coppie

La notazione per due sistemi

Scriviamo

$$|a\rangle \otimes |b\rangle = |ab\rangle .$$

Per due qubit scegliamo l'ordine

$$|00\rangle , |01\rangle , |10\rangle , |11\rangle .$$

Un vettore generale è

$$|\Psi\rangle = a\,|00\rangle + b\,|01\rangle + c\,|10\rangle + d\,|11\rangle .$$

La normalizzazione richiede
$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$.

	Secondo indice: 0	Secondo indice: 1
0	a	b
1	c	d

Ampiezze delle coppie

Una cella per ogni coppia di alternative, con un'ampiezza complessa in ciascuna cella.

Esempio: uno stato prodotto

Prepariamo $|+\rangle \otimes |1\rangle$.

$$|+\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle).$$

La colonna è $(0, 1, 0, 1)^{\mathsf{T}}/\sqrt{2}$.

Nella base scelta gli esiti 01 e 11 hanno probabilità $1/2$; il secondo qubit dà sempre 1.

Ampiezze delle coppie

	Secondo indice 0	1
0	0	$1/\sqrt{2}$
1	0	$1/\sqrt{2}$

I quattro moduli quadri sono $(0, 1/2, 0, 1/2)$. Per il secondo qubit, $P(0) = 0 + 0 = 0$ e $P(1) = 1/2 + 1/2 = 1$.

Esempio: uno stato che non si fattorizza

Consideriamo

$$|\Phi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Se fosse $(u_0|0\rangle + u_1|1\rangle) \otimes (v_0|0\rangle + v_1|1\rangle)$, avremmo

$$u_0 v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad u_1 v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$u_0 v_1 = 0, \qquad u_1 v_0 = 0.$$

Il primo prodotto impone $u_0, v_0 \neq 0$. I due zeri impongono $u_1 = v_1 = 0$, in contraddizione con $u_1 v_1 = 1/\sqrt{2}$.

Ampiezze delle coppie

	Secondo indice: 0	Secondo indice: 1
0	$1/\sqrt{2}$	0
1	0	$1/\sqrt{2}$

Per stati puri, l'impossibilità di fattorizzare il vettore definisce l'entanglement.

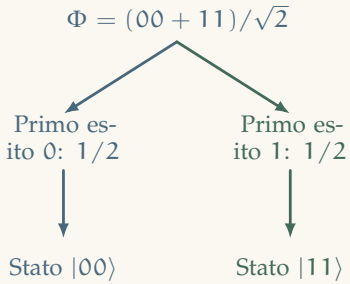
Esempio: misurare il primo qubit

Nell'ordine $(00, 01, 10, 11)$, i due proiettori locali sono

$$P_0 \otimes I = \mathrm{diag}(1, 1, 0, 0),$$
$$P_1 \otimes I = \mathrm{diag}(0, 0, 1, 1).$$

Sul ket $\Phi = (1, 0, 0, 1)^T/\sqrt{2}$ danno

$$(P_0 \otimes I)\Phi = \frac{(1, 0, 0, 0)^T}{\sqrt{2}},$$
$$(P_1 \otimes I)\Phi = \frac{(0, 0, 0, 1)^T}{\sqrt{2}}.$$



Il secondo risultato è certo dopo aver conosciuto il primo.

Entrambe le norme quadre valgono $1/2$. Dividendo ogni proiezione per $1/\sqrt{2}$ si ottengono $|00\rangle$ e $|11\rangle$, rispettivamente.

La distribuzione locale quando il primo esito è ignoto

Nel ramo $|00\rangle$, il secondo qubit dà 0 con probabilità 1; nel ramo $|11\rangle$ dà 0 con probabilità 0. Sommando sui due rami:

$$P_B(0) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}.$$

Per il secondo risultato:

$$P_B(1) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

La tabella congiunta ha dunque pesi $(1/2, 0, 0, 1/2)$ e marginali $(1/2, 1/2)$.

Pesi dopo la misura locale

	0	1	
0	1/2	0	1/2
1	0	1/2	1/2
	1/2	1/2	

Somme marginali

Le statistiche locali, quando il primo risultato non è comunicato, restano quelle della preparazione iniziale.

Espandere i due prodotti tensoriali

Sostituiamo le nuove coordinate in ciascun fattore:

$$
\begin{aligned}
|00\rangle &= \frac{(|+\rangle + |-\rangle) \otimes (|+\rangle + |-\rangle)}{2} \\
&= \frac{|{+}{+}\rangle + |{+}{-}\rangle + |{-}{+}\rangle + |{-}{-}\rangle}{2}, \\
|11\rangle &= \frac{(|+\rangle - |-\rangle) \otimes (|+\rangle - |-\rangle)}{2} \\
&= \frac{|{+}{+}\rangle - |{+}{-}\rangle - |{-}{+}\rangle + |{-}{-}\rangle}{2}.
\end{aligned}
$$

I segni provengono dal prodotto dei due coefficienti della coppia.

Ampiezze di $|11\rangle$ nella base $+, -$

	$+$	$-$
$+$	$+1/2$	$-1/2$
$-$	$-1/2$	$+1/2$

In questa tabella le celle contengono ampiezze, che possono avere segno negativo.

Esempio: la stessa coppia nella base $+, -$

Usiamo $|0\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$ e $|1\rangle = (|+\rangle - |-\rangle)/\sqrt{2}$.

$$|00\rangle = \frac{1}{2}(|++\rangle + |+-\rangle + |-+\rangle + |--\rangle),$$

$$|11\rangle = \frac{1}{2}(|++\rangle - |+-\rangle - |-+\rangle + |--\rangle).$$

Sommando e dividendo per $\sqrt{2}$:

$$|\Phi\rangle = \frac{|++\rangle + |--\rangle}{\sqrt{2}}.$$

	Secondo indice $+$	Secondo indice $-$
Primo indice $+$	$1/\sqrt{2}$	0
Primo indice $-$	0	$1/\sqrt{2}$

Ampiezze delle coppie

Anche nella nuova base gli esiti sono uguali con certezza; le etichette di riga e colonna ora sono $+, -$.

Somma delle ampiezze e probabilità

Sommando le due espansioni e dividendo per $\sqrt{2}$:

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\big[(1+1)\,|{+}{+}\rangle + (1-1)\,|{+}{-}\rangle + (1-1)\,|{-}{+}\rangle + (1+1)\,|{-}{-}\rangle\big].$$

Le ampiezze sono $(1/\sqrt{2}, 0, 0, 1/\sqrt{2})$. Prendendo il modulo quadro di ciascuna:

$$P(++) = \tfrac{1}{2}, \quad P(+-) = 0,$$
$$P(-+) = 0, \quad P(--) = \tfrac{1}{2}.$$

La somma è uno; gli esiti discordi hanno probabilità nulla.

Probabilità nella base $+, -$

	$+$	$-$
$+$	1/2	0
$-$	0	1/2

La cancellazione avviene nella somma delle ampiezze, prima di calcolare le probabilità.

Esempio: distinguere correlazione ed entanglement

Una sorgente può scegliere casualmente $|00\rangle$ oppure $|11\rangle$, ciascuno con probabilità $1/2$, senza registrare la scelta. Questa procedura definisce una miscela delle due preparazioni.

Nella base $+, -$, le ampiezze di $|00\rangle$ sono tutte $1/2$; quelle di $|11\rangle$ sono $(1, -1, -1, 1)/2$. In entrambi i casi, ogni modulo quadro vale

$$|1/2|^2 = |-1/2|^2 = 1/4.$$

Calcoliamo ora la media fra le due sorgenti per ciascuna delle quattro coppie.

	Secondo indice $+$	Secondo indice $-$
Primo indice $+$	$1/4$	$1/4$
Primo indice $-$	$1/4$	$1/4$

Probabilità delle coppie

Per una miscela si mediano le probabilità delle preparazioni scelte. Per il ket Φ si sommano invece le ampiezze prima del modulo quadro.

Confrontare le due preparazioni nella stessa base

Per la miscela, la probabilità totale dà

$$\mathrm{P}(++) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4},$$
$$\mathrm{P}(+-) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4},$$
$$\mathrm{P}(-+) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4},$$
$$\mathrm{P}(--) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}.$$

Per Φ i pesi sono $(1/2, 0, 0, 1/2)$. Le marginali sono $(1/2, 1/2)$ per entrambe le preparazioni, mentre le distribuzioni congiunte differiscono.

Φ

1/2	0
0	1/2

Marginali: 1/2, 1/2

Miscela

1/4	1/4
1/4	1/4

Marginali: 1/2, 1/2

Base $+, -$: stato Φ e miscela

Le due tabelle mostrano probabilità, con la stessa scala e lo stesso ordine delle coppie.

Raccogliere in una matrice tutte le probabilità

Nel primo modulo la fase relativa distingueva preparazioni con gli stessi pesi H/V. Il prodotto diadico permette di conservare, insieme ai pesi, i termini che contribuiscono alle letture in altre basi.

Per $|\psi\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$, definiamo

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ ba^* & |b|^2 \end{pmatrix}.$$

Per $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$:

$$\rho_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

I termini fuori diagonale conservano la relazione di fase.

$\lvert a\rvert^2$	ab^*
ba^*	$\lvert b\rvert^2$

Pesi sulla diagonale;
relazioni fra componenti nelle altre caselle.

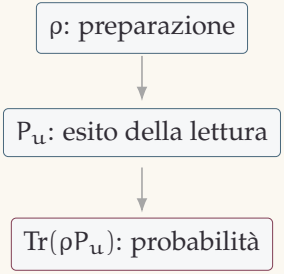
Questa è una matrice densità di uno stato puro. La base usata per scriverla deve essere dichiarata.

Una probabilità dalla matrice densità

La traccia di una matrice è la somma dei suoi elementi diagonali. Se $P_u = |u\rangle \langle u|$ è il proiettore di una lettura, la probabilità si può scrivere come $\mathrm{Tr}(\rho P_u)$. Verifichiamo la formula espandendo le componenti.

Con $|\psi\rangle = \sum_j a_j |j\rangle$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\rho P_u) &= \sum_{j,k} a_j a_k^* u_k u_j^* \\ &= \left(\sum_j u_j^* a_j\right)\left(\sum_k a_k^* u_k\right) \\ &= |\langle u|\psi\rangle|^2.\end{aligned}$$



La somma su j, k esplicita tutti i contributi. In una base completa la somma dei proiettori è I, perciò la somma delle probabilità è $\mathrm{Tr}\rho = 1$.

Descrivere una preparazione scelta casualmente

Se un apparato prepara lo stato $|\psi_j\rangle$ con probabilità q_j, senza rendere disponibile l'etichetta j, le previsioni si ottengono mediando le probabilità delle singole preparazioni.

$$\rho = \sum_j q_j \, |\psi_j\rangle \langle\psi_j| \,, \qquad \sum_j q_j = 1.$$

Nel caso 0 oppure 1 con pesi uguali:

$$\rho_m = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} I.$$

Le probabilità H/V sono 1/2 e 1/2.



Il centro descrive la miscela equiprobabile: tutte le direzioni di lettura hanno esiti equiprobabili.

La matrice densità include anche stati misti. Una sua decomposizione in preparazioni pure può non essere unica.

Le miscele come baricentri nella palla di Bloch

Per $\rho_j = (I + r_j \cdot \sigma)/2$, con $\sigma = (X, Y, Z)$, $q_j \geq 0$ e $\sum_j q_j = 1$:

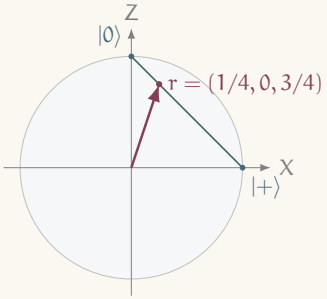
$$\rho = \sum_j q_j \rho_j = \frac{I + r \cdot \sigma}{2}, \qquad r = \sum_j q_j r_j.$$

Esempio: peso $3/4$ per $|0\rangle$, peso $1/4$ per $|+\rangle$:

$$\rho = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3/4 + 1/8 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/8 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

I vettori puri sono $(0, 0, 1)$ e $(1, 0, 0)$: il loro baricentro è $r = (1/4, 0, 3/4)$.



Sezione XZ della palla di Bloch. Il baricentro divide il segmento con pesi 3/4 e 1/4.

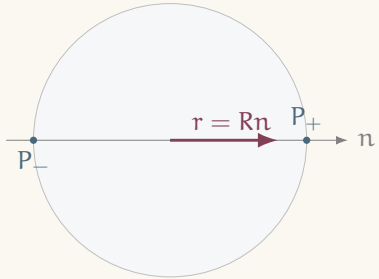
Qui $\|r\|^2 = (1 + 9)/16 = 5/8 < 1$: la miscela è interna alla sfera.

Perché gli stati ammessi riempiono una palla

Per $R = \|r\| > 0$ poniamo $n = r/R$. Poiché $(n \cdot \sigma)^2 = I$, i proiettori sono $P_\pm = (I \pm n \cdot \sigma)/2$. Pertanto

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{I + R\, n \cdot \sigma}{2} \\ &= \frac{(P_+ + P_-) + R(P_+ - P_-)}{2} \\ &= \frac{1+R}{2} P_+ + \frac{1-R}{2} P_-.\end{aligned}$$

I pesi sommano a uno e sono non negativi esattamente per $R \leq 1$. Per $R = 0$ danno $1/2, 1/2$; per $R = 1$ danno $1, 0$.



Per il precedente esempio:
$R = \sqrt{10}/4$,
$\lambda_\pm = (4 \pm \sqrt{10})/8$.

La positività ammette precisamente i punti della palla di Bloch.

Le stesse probabilità H/V possono nascondere preparazioni diverse

Confrontiamo la diagonale pura ρ_+ con la miscela $I/2$. Entrambe hanno elementi diagonali uguali; una misura lungo la diagonale $+$ le distingue.

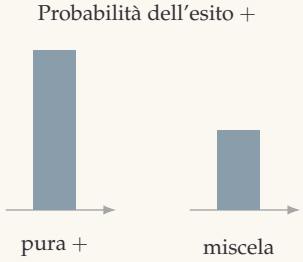
Per lo stato puro:

$$\rho_+ P_+ = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad P(+) = 1.$$

Per la miscela:

$$\rho_m P_+ = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P(+) = \tfrac{1}{2}.$$

Le probabilità di $-$ sono, rispettivamente, 0 e $1/2$.



La lettura H/V non basta a ricostruire lo stato. Il confronto rende esplicito il ruolo dei termini fuori diagonale.

La preparazione pura nella base diagonale

Usiamo $P_+ = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Per $\rho_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

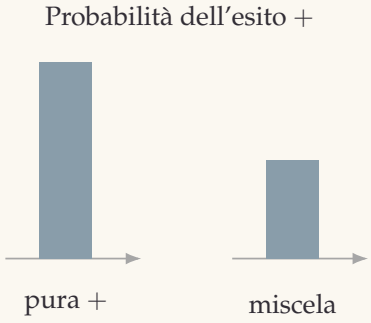
$$\rho_+ P_+ = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 \end{pmatrix}.$$

La traccia somma gli elementi diagonali:

$$p(+) = \frac{2+2}{4} = 1.$$

Per $P_- = I - P_+$, la linearità della traccia dà

$$p(-) = \mathrm{Tr}(\rho_+) - \mathrm{Tr}(\rho_+ P_+) = 1 - 1 = 0.$$



Le due probabilità sommano a uno; lo stesso apparato distingue le due preparazioni nelle statistiche ripetute.

La miscela nella medesima base di misura

Usiamo $P_+ = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Per $\rho_m = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

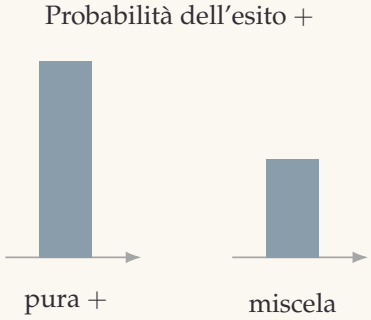
$$\rho_m P_+ = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+0 & 1+0 \\ 0+1 & 0+1 \end{pmatrix}.$$

La traccia somma gli elementi diagonali:

$$p(+) = \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Per $P_- = I - P_+$, la linearità della traccia dà

$$p(-) = \mathrm{Tr}(\rho_m) - \mathrm{Tr}(\rho_m P_+) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$



Le due probabilità sommano a uno; lo stesso apparato distingue le due preparazioni nelle statistiche ripetute.

Previsioni locali per uno stato congiunto

Indichiamo con S il qubit osservato e con E l'ambiente. Se l'esito ambientale non viene letto, la probabilità locale somma i contributi di tutte le sue alternative ortogonali. Questa somma definisce la traccia parziale.

Se $|\Psi\rangle = \sum_{s,e} c_{se}\,|s\rangle\,|e\rangle$, allora

$$(\rho_S)_{ss'} = \sum_e c_{se} c^*_{s'e}.$$

Ogni casella conserva un confronto fra due righe della tabella delle ampiezze. La somma percorre le alternative ambientali, rappresentate dalle colonne.

Colonne: alternative di E

c_{00}	c_{01}
c_{10}	c_{11}

Si combinano le righe di S;
si sommano i prodotti sulle colonne di E.

L'ambiente non deve essere misurato perché la riduzione sia necessaria. La formula esprime quali osservazioni sono disponibili su S.

Ricavare le probabilità locali

La formula della traccia parziale deriva dalla regola di Born applicata all'insieme. Per una direzione locale $|u\rangle$, ogni alternativa ambientale ha una propria ampiezza; le probabilità di queste alternative vengono sommate.

$$
\begin{aligned}
P(u) &= \sum_{e} \left| \sum_{s} u_s^* c_{se} \right|^2 \\
&= \sum_{e,s,s'} u_s^* c_{se} c_{s'e}^* u_{s'} \\
&= \sum_{s,s'} u_s^* \underbrace{\left(\sum_{e} c_{se} c_{s'e}^* \right)}_{(\rho_S)_{ss'}} u_{s'} \\
&= \langle u | \rho_S | u \rangle .
\end{aligned}
$$

E=0: $\sum_s u_s^* c_{s0}$

E=1: $\sum_s u_s^* c_{s1}$

Si calcola il modulo quadro di ciascuna ampiezza, poi si sommano i due risultati.

L'espansione esplicita tutti gli indici: s, s' riguardano il sistema; e riguarda l'ambiente non osservato.

Riprendere le tracce ambientali del primo modulo

La preparazione congiunta è $|\Psi\rangle = (|0\rangle\,|u\rangle + |1\rangle\,|v\rangle)/\sqrt{2}$, con $|u\rangle = |0\rangle$ e $|v\rangle = \gamma\,|0\rangle + \sqrt{1-\gamma^2}\,|1\rangle$. In questo esempio γ è reale, fra zero e uno.

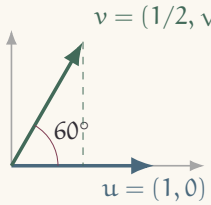
Nell'ordine $00, 01, 10, 11$:

$$|\Psi\rangle \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \gamma \\ \sqrt{1-\gamma^2} \end{pmatrix}.$$

Il prodotto interno delle tracce è

$$\langle u|v\rangle = 1 \cdot \gamma + 0 \cdot \sqrt{1-\gamma^2} = \gamma.$$

La norma congiunta vale $(1 + \gamma^2 + 1 - \gamma^2)/2 = 1$.



proiezione 1/2

Per $\gamma = 1/2$, l'angolo fra le tracce nel piano reale delle ampiezze è 60°.

La figura rappresenta vettori ambientali, non due direzioni sulla sfera di Bloch. L'insieme S+E è in uno stato puro.

Traccia parziale: elemento 00

Nell'ordine $00, 01, 10, 11$, i coefficienti sono

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, \gamma, \sqrt{1-\gamma^2}), \quad 0 \le \gamma \le 1.$$

$$\begin{aligned}(\rho_S)_{00} &= c_{00}c_{00}^* + c_{01}c_{01}^* \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot 0 \\ &= \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$\rho_{00} = 1/2$	$\rho_{01} = 1/4$
$\rho_{10} = 1/4$	$\rho_{11} = 1/2$

Caso numerico $\gamma = 1/2$.
In rosso la cella calcolata.

Il coniugio lascia invariati i coefficienti reali; con $\gamma = 1/2$, le coerenze valgono $1/4$.

Traccia parziale: elemento 01

Nell'ordine $00, 01, 10, 11$, i coefficienti sono

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, \gamma, \sqrt{1-\gamma^2}), \quad 0 \le \gamma \le 1.$$

$$\begin{aligned}(\rho_S)_{01} &= c_{00}c_{10}^* + c_{01}c_{11}^* \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\gamma}{\sqrt{2}} + 0\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\gamma}{2} + 0 = \frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

$\rho_{00} = 1/2$	$\rho_{01} = 1/4$
$\rho_{10} = 1/4$	$\rho_{11} = 1/2$

Caso numerico $\gamma = 1/2$.
In rosso la cella calcolata.

Il coniugio lascia invariati i coefficienti reali; con $\gamma = 1/2$, le coerenze valgono $1/4$.

Traccia parziale: elemento 10

Nell'ordine $00, 01, 10, 11$, i coefficienti sono

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, \gamma, \sqrt{1-\gamma^2}), \quad 0 \le \gamma \le 1.$$

$$\begin{aligned}(\rho_S)_{10} &= c_{10}c_{00}^* + c_{11}c_{01}^* \\ &= \frac{\gamma}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\sqrt{2}} \cdot 0 \\ &= \frac{\gamma}{2} + 0 = \frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

$\rho_{00} = 1/2$	$\rho_{01} = 1/4$
$\rho_{10} = 1/4$	$\rho_{11} = 1/2$

Caso numerico $\gamma = 1/2$.
In rosso la cella calcolata.

Il coniugio lascia invariati i coefficienti reali; con $\gamma = 1/2$, le coerenze valgono $1/4$.

Traccia parziale: elemento 11

Nell'ordine $00, 01, 10, 11$, i coefficienti sono

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, \gamma, \sqrt{1-\gamma^2}), \quad 0 \le \gamma \le 1.$$

$$\begin{aligned}(\rho_S)_{11} &= c_{10}c_{10}^* + c_{11}c_{11}^* \\ &= \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= \frac{\gamma^2}{2} + \frac{1-\gamma^2}{2} \\ &= \frac{\gamma^2 + 1 - \gamma^2}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$\rho_{00} = 1/2$	$\rho_{01} = 1/4$
$\rho_{10} = 1/4$	$\rho_{11} = 1/2$

Caso numerico $\gamma = 1/2$.
In rosso la cella calcolata.

Il coniugio lascia invariati i coefficienti reali; con $\gamma = 1/2$, le coerenze valgono $1/4$.

La matrice ridotta e i suoi casi limite

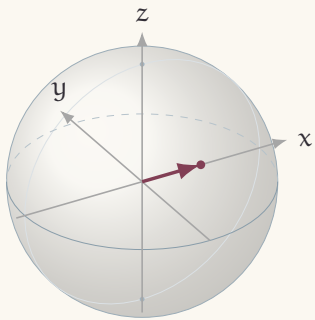
Le quattro celle ricostruiscono, nella base $0/1$,

$$\rho_S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Per le tracce del modulo 1, $\gamma = 1/2$:

$$\rho_S = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Tr}\rho_S = 1/2 + 1/2 = 1.$$

Con tracce identiche, $\gamma = 1$ e $\rho_S = P_+$. Con tracce ortogonali, $\gamma = 0$ e $\rho_S = I/2$.



Il caso numerico ha $\gamma = 1/2$.

La somiglianza delle tracce controlla la coerenza locale. L'estensione a γ complesso richiede di conservare i coniugati.

La probabilità locale dell'esito +

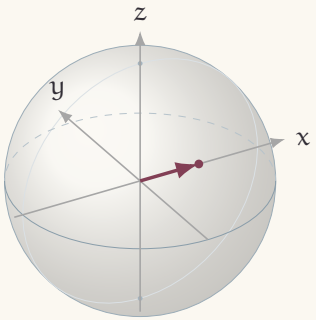
Nella base 0/1, $\rho_S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$ e $|+\rangle = (1,1)^T/\sqrt{2}$.

$$\rho_S |+\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+\gamma \\ \gamma+1 \end{pmatrix}.$$

$$P(+) = \frac{1}{4}(1,1)\begin{pmatrix} 1+\gamma \\ \gamma+1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(1+\gamma)+(\gamma+1)}{4}.$$

$$P(+) = \frac{2+2\gamma}{4} = \frac{1+\gamma}{2} = \frac{3/2}{2} = \frac{3}{4}.$$



Lettura lungo x per $\gamma = 1/2$.

I valori numerici usano γ=1/2. La somma dei due esiti è 3/4+1/4=1.

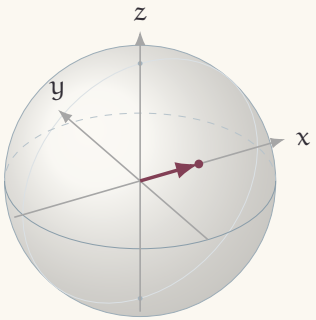
La probabilità locale dell'esito -

Nella base 0/1, $\rho_S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$ e $|-\rangle = (1,-1)^T/\sqrt{2}$.

$$\rho_S |-\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1-\gamma \\ \gamma - 1 \end{pmatrix}.$$

$$P(-) = \frac{1}{4}(1,-1)\begin{pmatrix} 1-\gamma \\ \gamma - 1 \end{pmatrix} = \frac{(1-\gamma)-(\gamma-1)}{4}.$$

$$P(-) = \frac{1-\gamma-\gamma+1}{4} = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}.$$



Lettura lungo x per $\gamma = 1/2$.

I valori numerici usano γ=1/2. La somma dei due esiti è 3/4+1/4=1.

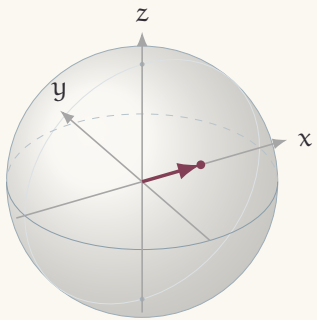
Confrontare le entrate delle due matrici

La matrice generale di Bloch e quella del caso ambientale sono

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + r_z & r_x - i r_y \\ r_x + i r_y & 1 - r_z \end{pmatrix},$$

$$\rho_S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Confrontiamo le entrate nelle stesse posizioni, mantenendo la base 0/1. La diagonale determina r_z; la coerenza determina r_x, r_y.



Per $\gamma = 1/2$:
$(r_x, r_y, r_z) = (1/2, 0, 0)$.

Queste coordinate riproducono le probabilità operative del modulo 1.

Ricavare tutte le coordinate locali

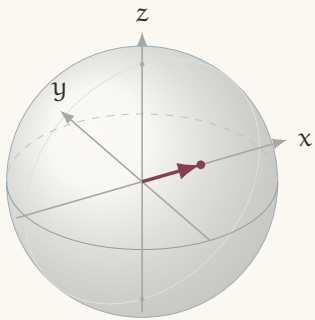
Per $\rho_S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$, il confronto con la forma di Bloch dà

$$\frac{1 + r_z}{2} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 1 + r_z = 1 \;\Rightarrow\; r_z = 0.$$

$$\frac{r_x - i r_y}{2} = \frac{\gamma}{2} \;\Rightarrow\; r_x - i r_y = \gamma + 0i.$$

Quindi $r_x = \gamma$, $-r_y = 0$ e $r_y = 0$. Per $\gamma \geq 0$:

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = \sqrt{\gamma^2} = \gamma.$$



Per $\gamma = 1/2$:
$(r_x, r_y, r_z) = (1/2, 0, 0)$.

Queste coordinate riproducono le probabilità operative del modulo 1.

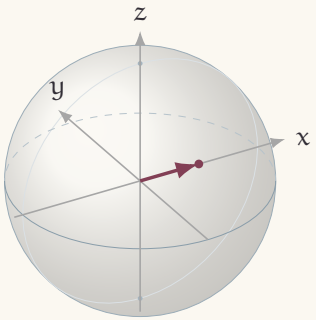
Moltiplicare la matrice locale per se stessa

Per $\rho_S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$, le quattro entrate del quadrato sono

$$(\rho_S^2)_{00} = (1 \cdot 1 + \gamma\gamma)/4 = (1+\gamma^2)/4,$$
$$(\rho_S^2)_{01} = (1\gamma + \gamma 1)/4 = 2\gamma/4,$$
$$(\rho_S^2)_{10} = (\gamma 1 + 1\gamma)/4 = 2\gamma/4,$$
$$(\rho_S^2)_{11} = (\gamma\gamma + 1 \cdot 1)/4 = (1+\gamma^2)/4.$$

La traccia somma le entrate diagonali:

$$\mathrm{Tr}(\rho_S^2) = \frac{2+2\gamma^2}{4} = \frac{1+\gamma^2}{2}.$$



Il raggio locale è γ, qui 1/2.

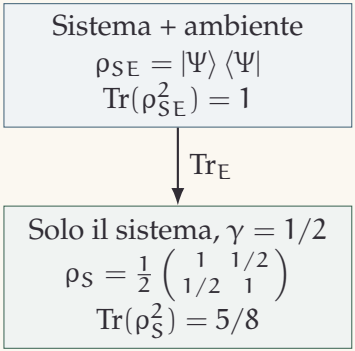
Con γ=1/2, la purezza locale vale (1+1/4)/2=5/8.

La purezza dello stato congiunto

Lo stato $|\Psi\rangle = (|0\rangle\,|u\rangle + |1\rangle\,|v\rangle)/\sqrt{2}$ è normalizzato, poiché $|u\rangle$ e $|v\rangle$ hanno norma uno e $\langle 0|1\rangle = 0$. Per $\rho_{SE} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$:

$$\begin{aligned}\rho_{SE}^2 &= |\Psi\rangle\langle\Psi|\,|\Psi\rangle\langle\Psi| \\ &= |\Psi\rangle \underbrace{\langle\Psi|\Psi\rangle}_{1} \langle\Psi| \\ &= |\Psi\rangle\langle\Psi| = \rho_{SE}.\end{aligned}$$

Quindi $\mathrm{Tr}(\rho_{SE}^2) = \mathrm{Tr}\rho_{SE} = 1$, mentre per $\gamma = 1/2$ la purezza locale è $5/8$.



L'inferenza dall'impurità locale all'entanglement usa qui l'ipotesi esplicita di stato congiunto puro.

Verificare che la matrice descriva uno stato possibile

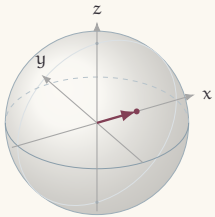
Una matrice densità è hermitiana, ha traccia uno e autovalori non negativi. Nell'esempio le due diagonali sono autovettori e rendono immediato il controllo.

$$\rho_S \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1+\gamma}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

$$\rho_S \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1-\gamma}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Con $0 \leq \gamma \leq 1$ entrambi gli autovalori sono non negativi e sommano a 1.

Per $\gamma = 1/2$: $\rho_S = \frac{3}{4}P_+ + \frac{1}{4}P_-$.



Il punto è la media pesata di $+x$ e $-x$: $\frac{3}{4}(1) + \frac{1}{4}(-1) = \frac{1}{2}$.

La stessa matrice può essere ottenuta mediante una miscela di preparazioni pure. Questa equivalenza locale non identifica la storia fisica della preparazione.

Una traccia ambientale con fase complessa

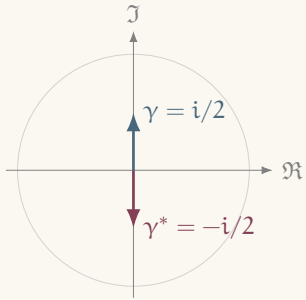
Scegliamo $u = |0\rangle$ e $v = (i\,|0\rangle + \sqrt{3}\,|1\rangle)/2$. Allora $\|v\|^2 = (1+3)/4 = 1$ e $\gamma = \langle u|v\rangle = i/2$. Per $|\Psi\rangle = (|0\rangle\, u + |1\rangle\, v)/\sqrt{2}$, nell'ordine $00, 01, 10, 11$ le ampiezze sono

$$\frac{(1, 0, i/2, \sqrt{3}/2)}{\sqrt{2}}.$$

La somma sull'ambiente dà le due probabilità locali:

$$\rho_{00} = |c_{00}|^2 + |c_{01}|^2 = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2},$$

$$\rho_{11} = |c_{10}|^2 + |c_{11}|^2 = \frac{|i|^2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}.$$



Piano complesso della sovrapposizione. $\rho_{10} = \gamma/2$, $\rho_{01} = \gamma^*/2$.

Le coerenze fuori diagonale permettono di prevedere le letture in altre basi.

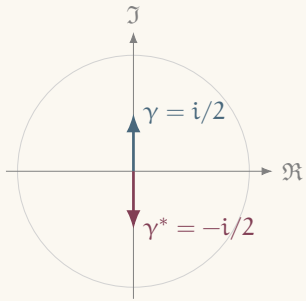
Conservare il coniugio nelle coerenze

Con le stesse ampiezze, calcoliamo le due celle restanti:

$$\begin{aligned}\rho_{01} &= c_{00}c_{10}^* + c_{01}c_{11}^* \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-i}{2\sqrt{2}} + 0 = \frac{-i}{4}, \\ \rho_{10} &= c_{10}c_{00}^* + c_{11}c_{01}^* \\ &= \frac{i}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{i}{4}.\end{aligned}$$

La matrice locale è dunque

$$\rho_S = \begin{pmatrix} 1/2 & -i/4 \\ i/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \gamma^* \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}.$$



Piano complesso della sovrapposizione. $\rho_{10} = \gamma/2$, $\rho_{01} = \gamma^*/2$.

Le coerenze coniugate garantiscono l'hermitianità e fissano l'orientamento di Bloch.

La fase delle coerenze orienta il vettore locale

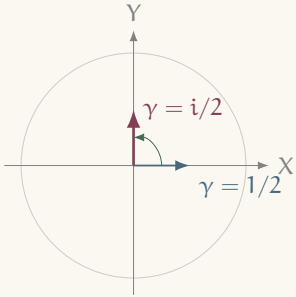
Confrontando ρ_S con $(I + r_x X + r_y Y + r_z Z)/2$ si legge $r = (0, 1/2, 0)$. Verifichiamo le medie:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\rho_S X) &= -i/4 + i/4 = 0, \\ \mathrm{Tr}(\rho_S Y) &= (-i/4)i + (i/4)(-i) \\ &= 1/4 + 1/4 = 1/2. \end{aligned}$$

Da $P_{j\pm} = (I \pm \sigma_j)/2$ segue

$$\begin{aligned} p(X\pm) &= (1 \pm 0)/2 = 1/2, \\ p(Y+) &= (1 + 1/2)/2 = 3/4, \\ p(Y-) &= (1 - 1/2)/2 = 1/4. \end{aligned}$$

Gli autovalori sono $(1 \pm \|r\|)/2 = 3/4, 1/4$.



Sezione equatoriale XY di Bloch.
Stessa lunghezza 1/2,
diversa direzione della coerenza.

Controllo delle somme: $1/2 + 1/2 = 1$ e $3/4 + 1/4 = 1$.

Approfondimento fisico: avvicinare due profili temporali

Nel modello fotonico le tracce possono essere due profili temporali. Un compensatore riduce la separazione fra i loro centri. Se gli altri gradi di libertà non distinguono i due contributi, la sovrapposizione dei profili determina la coerenza osservabile.

Dal calcolo gaussiano:

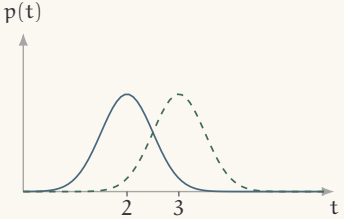
$$\gamma(d) = e^{-d^2/(8\sigma^2)}.$$

Per $d = 2\sigma$:

$$\gamma = e^{-1/2} \simeq 0{,}6065,$$

$$P(+) \simeq 0{,}8033, \quad P(-) \simeq 0{,}1967.$$

Per $d = 0$: $\gamma = 1$ e $P(+) = 1$.



Profili di densità con $d = 2\sigma$; la sovrapposizione si calcola sulle radici delle densità.

Torna al contrasto Prosegui. Le fasi interne dei due profili sono assunte uguali; altri marcatori possono ridurre ulteriormente il contrasto.

Dal ritardo residuo alle due probabilità

Per $d = 2\sigma$, con $\sigma > 0$, l'esponente è

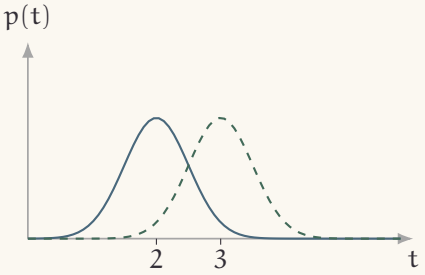
$$\frac{d^2}{8\sigma^2} = \frac{(2\sigma)^2}{8\sigma^2} = \frac{4\sigma^2}{8\sigma^2} = \frac{1}{2}.$$

Quindi $\gamma = e^{-1/2} \simeq 0{,}6065$. Nella base $+, -$,

$$p(+) = \frac{1+\gamma}{2} \simeq \frac{1{,}6065}{2} \simeq 0{,}8033,$$

$$p(-) = \frac{1-\gamma}{2} \simeq \frac{0{,}3935}{2} \simeq 0{,}1967.$$

Per $d = 0$, l'esponente si annulla: $\gamma = e^0 = 1$, quindi $p(+) = 1$ e $p(-) = 0$.



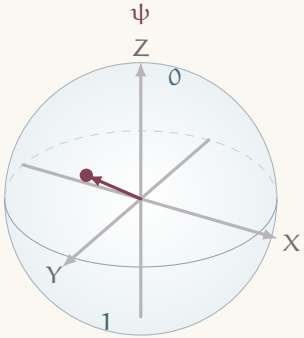
Profili di densità con $d = 2\sigma$; la sovrapposizione si calcola sulle radici delle densità.

I decimali sono arrotondati; le espressioni in γ conservano esattamente la normalizzazione.

Capitolo 31

Un esperimento calcolato dall'inizio alla fine

Stato, operatore, spettro, probabilità e aggiornamento: ogni risultato diventa il dato del passaggio successivo.



Sfera di Bloch: stati puri

Il problema conclusivo

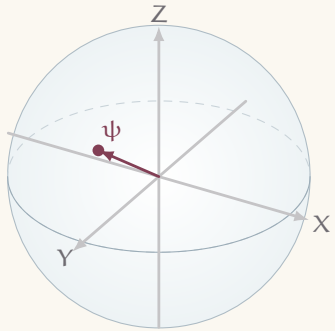
Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}, \qquad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo gli esiti possibili, le loro probabilità, media e dispersione; infine lo stato successivo a ciascuno dei due esiti.

Verifichiamo ogni quantità anche attraverso una seconda via quando disponibile.

La preparazione rimane la stessa



Lo stato è quello già usato: cambia l'osservabile, quindi cambia la base di misura.

Preparare lo stato iniziale con due trasformazioni

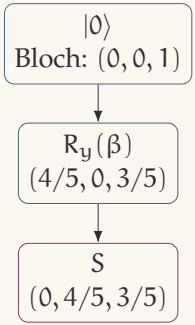
Prepariamo $|0\rangle$ e scegliamo $\beta = 2\arctan(1/2)$, quindi $\cos(\beta/2) = 2/\sqrt{5}$ e $\sin(\beta/2) = 1/\sqrt{5}$. La formula delle rotazioni dà

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix},$$

$$R_y(\beta)\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Segue il prodotto

$$S R_y(\beta)\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 2 + i\cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{(2, i)^{\mathsf{T}}}{\sqrt{5}}.$$



Schema delle operazioni ideali.
Le coordinate indicano i punti di Bloch.

La preparazione ideale usa una rotazione attorno a Y e un quarto di giro attorno a Z; la realizzazione fisica dipende dalla codifica del qubit.

Sviluppare e fattorizzare il polinomio

I prodotti nel determinante sono

$$(1-\lambda)(-\lambda) = -\lambda + \lambda^2,$$

$$(1-i)(1+i) = 1 + i - i - i^2 = 2.$$

Quindi il polinomio è $\lambda^2 - \lambda - 2$. Cerchiamo due numeri con somma -1 e prodotto -2: sono -2 e $+1$.

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda - 2\lambda - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

Il prodotto si annulla per $\lambda = 2$ oppure $\lambda = -1$.

Due autovalori distinti



Gli esiti dipendono dall'operatore; i loro pesi saranno determinati anche dalla preparazione.

Passo 1: hermitianità e polinomio

La diagonale è reale e gli elementi fuori diagonale sono coniugati: $A^\dagger = A$.

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= (1-\lambda)(-\lambda) - (1-i)(1+i) \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda + 1).\end{aligned}$$

Gli esiti possibili sono

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = -1.$$

Spettro dell'operatore



Valori propri reali

Gli autovalori dipendono dall'operatore. Per ricavare le probabilità occorrono anche gli autostati e la preparazione.

Passo 2: primo autostato

Per $\lambda_1 = 2$ la prima riga di $(A - 2I)u = 0$ dà

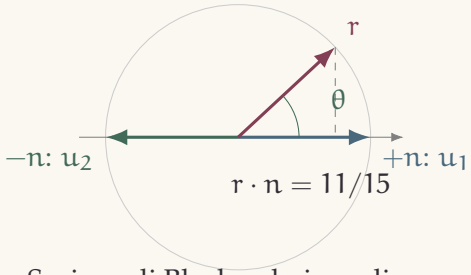
$$-u_0 + (1 - i)u_1 = 0.$$

Scegliamo $u_1 = 1$, quindi $u_0 = 1 - i$.

$$\|(1 - i, 1)^T\|^2 = 2 + 1 = 3.$$

$$|u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 - i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Controllo della seconda riga: $(1 + i)(1 - i) - 2 = 0$.



Sezione di Bloch nel piano di r, n.
$\theta = \arccos(11/15) \simeq 42{,}83°$
$+n \leftrightarrow 2$, $-n \leftrightarrow -1$

$|1 - i|^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2$. Nella seconda riga, $(1 + i)(1 - i) - 2 = 1 - i + i - i^2 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$.

Passo 3: secondo autostato

Per $\lambda_2 = -1$, la prima equazione è
$2u_0 + (1-i)u_1 = 0$. Ponendo $u_1 = 2$, si ricava
$2u_0 = -2 + 2i$, cioè $u_0 = -1 + i$.

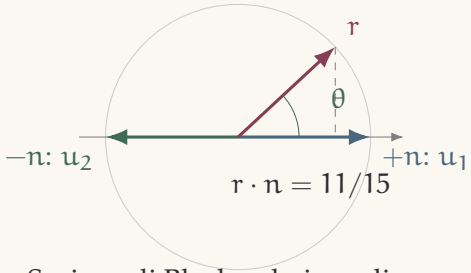
La seconda equazione è $(1+i)u_0 + u_1 = 0$:

$$(1+i)(-1+i) + 2 = -1 + i - i + i^2 + 2 = 0.$$

La norma quadra è $|-1+i|^2 + |2|^2 = 1 + 1 + 4 = 6$.
Pertanto

$$|u_2\rangle = \frac{(-1+i, 2)^T}{\sqrt{6}}.$$

Il prodotto $\langle u_1|u_2\rangle$ ha lo stesso numeratore appena annullato, diviso per $\sqrt{18}$, e vale zero.



Sezione di Bloch nel piano di r, n.
$\theta = \arccos(11/15) \simeq 42{,}83°$
$+n \leftrightarrow 2$, $-n \leftrightarrow -1$

Le norme sono uno e gli autostati sono ortogonali: la base di misura è completa.

Le entrate dei due prodotti esterni

Prima di ridurre i prodotti, le matrici sono

$$P_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}(1-i)(1+i) & (1-i)1\\ 1(1+i) & 1\cdot 1\end{pmatrix},$$

$$P_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}(-1+i)(-1-i) & (-1+i)2\\ 2(-1-i) & 2\cdot 2\end{pmatrix}.$$

Nel primo elemento di P_2:

$$(-1+i)(-1-i) = 1+i-i-i^2 = 2.$$

Gli altri elementi sono $-2+2i$, $-2-2i$ e 4. Questi prodotti fissano tutti i segni nelle due matrici.

Numeratore di P_2

	0	1
0	2	$-2+2i$
1	$-2-2i$	4

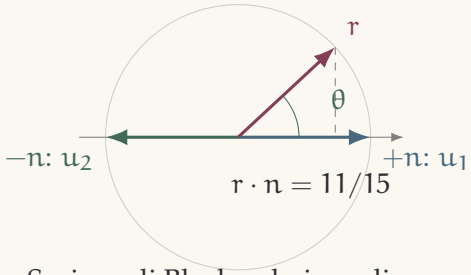
I proiettori selezionano le due direzioni proprie ortogonali.

Passo 4: i proiettori

$$P_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1+i \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1-i & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2+2i \\ -2-2i & 4 \end{pmatrix}.$$

Ogni elemento è un prodotto colonna-riga.



Sezione di Bloch nel piano di r, n.
$\theta = \arccos(11/15) \simeq 42{,}83°$
$+n \leftrightarrow 2$, $-n \leftrightarrow -1$

I proiettori saranno usati sia per le probabilità sia per lo stato successivo alla misura.

Passo 5: completezza e ricostruzione

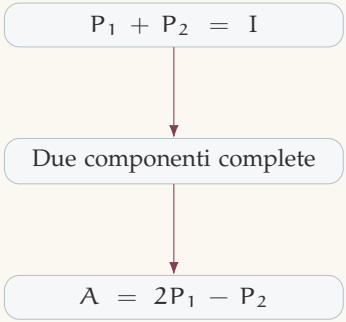
Con denominatore 6, gli elementi fuori diagonale sono $(2-2i)+(-2+2i)=0$ e il suo coniugato.

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4+2 & 0 \\ 0 & 2+4 \end{pmatrix} = I.$$

Per $2P_1 - P_2$, fuori diagonale troviamo $(4-4i)-(-2+2i) = 6-6i$ e il suo coniugato.

$$2P_1 - P_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8-2 & 6-6i \\ 6+6i & 4-4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} = A.$$



Completezza e ricostruzione controllano segni e normalizzazioni.

Le due direzioni proprie sulla sfera

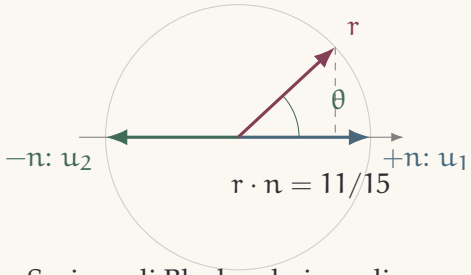
Per $u_1 = (1-i, 1)^T/\sqrt{3}$, $c_0^* c_1 = (1+i)/3$. Raddoppiando parte reale e immaginaria si ottengono $r_x = r_y = 2/3$.

$$r_z = 2/3 - 1/3 = 1/3.$$

Per $u_2 = (-1+i, 2)^T/\sqrt{6}$, $d_0^* d_1 = (-2-2i)/6$: $s_x = s_y = -2/3$ e

$$s_z = 2/6 - 4/6 = -1/3.$$

I punti sono $n = (2, 2, 1)/3$ e $-n$. La norma è $\|n\|^2 = (4+4+1)/9 = 1$.



Sezione di Bloch nel piano di r, n.
$\theta = \arccos(11/15) \simeq 42{,}83°$
$+n \leftrightarrow 2$, $-n \leftrightarrow -1$

Il punto $+n$ corrisponde all'esito 2; il punto $-n$ all'esito -1.

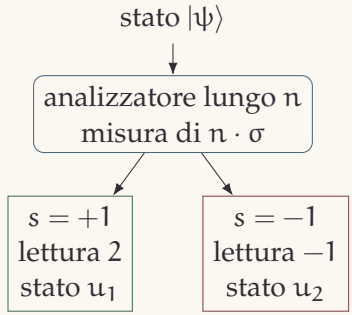
L'osservabile come analizzatore lungo un asse

Per l'asse unitario $n = (2,2,1)/3$, l'osservabile $N = n \cdot \sigma$ vale

$$N = \frac{2X + 2Y + Z}{3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2-2i \\ 2+2i & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{2}I + \frac{3}{2}N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+1 & 2-2i \\ 2+2i & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} = A.$$

L'analizzatore di N distingue $s = \pm 1$. Registrando $a = (1+3s)/2$, otteniamo $(1+3)/2 = 2$ oppure $(1-3)/2 = -1$.



Schema operativo di una misura proiettiva ideale.

Il rapporto fra asse di Bloch e direzioni fisiche dipende dalla codifica del qubit.

Passo 6: ampiezze degli esiti

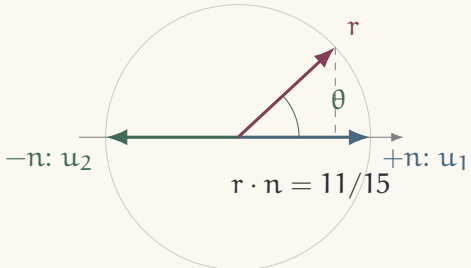
Il primo bra è $(1+i,1)/\sqrt{3}$:

$$\langle u_1|\psi\rangle = \frac{2(1+i)+i}{\sqrt{15}} = \frac{2+3i}{\sqrt{15}}.$$

Il secondo è $(-1-i,2)/\sqrt{6}$:

$$\langle u_2|\psi\rangle = \frac{2(-1-i)+2i}{\sqrt{30}} = \frac{-2}{\sqrt{30}}.$$

I numeri ottenuti sono ancora ampiezze.



Sezione di Bloch nel piano di r, n.
$\theta = \arccos(11/15) \simeq 42{,}83°$
$+n \leftrightarrow 2$, $-n \leftrightarrow -1$

Il modulo dell'ampiezza, non la sua sola parte reale, determina la probabilità.

Passo 7: probabilità

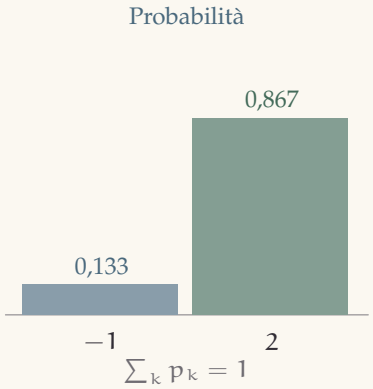
Prendiamo i moduli quadri:

$$P(2) = \frac{|2+3i|^2}{15} = \frac{4+9}{15} = \frac{13}{15},$$

$$P(-1) = \frac{|-2|^2}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}.$$

Controllo:

$$P(2) + P(-1) = \frac{13+2}{15} = 1.$$



La distribuzione è sbilanciata verso l'esito 2, ma entrambi gli esiti sono possibili.

Controllare i pesi mediante la geometria

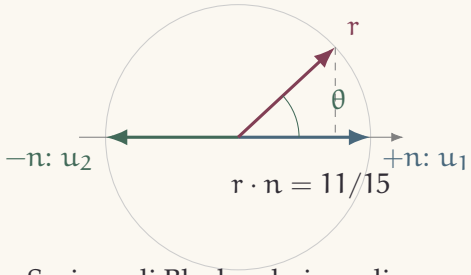
Lo stato iniziale ha $r = (0, 4/5, 3/5)$, mentre l'autostato dell'esito 2 ha $n = (2/3, 2/3, 1/3)$.

$$r \cdot n = 0 \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{5}\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\frac{1}{3} = \frac{8}{15} + \frac{3}{15} = \frac{11}{15}.$$

La formula del prodotto interno sulla sfera dà

$$P(2) = \frac{1 + r \cdot n}{2} = \frac{1 + 11/15}{2} = \frac{13}{15},$$

$$P(-1) = \frac{1 - r \cdot n}{2} = \frac{1 - 11/15}{2} = \frac{2}{15}.$$



Sezione di Bloch nel piano di r, n.
$\theta = \arccos(11/15) \simeq 42{,}83°$
$+n \leftrightarrow 2$, $-n \leftrightarrow -1$

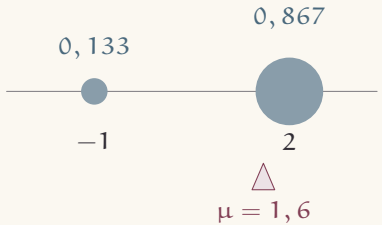
Il confronto con i moduli delle ampiezze verifica la stessa distribuzione attraverso una seconda rappresentazione.

Passo 8: media e momento secondo

Usiamo la distribuzione appena ottenuta:

$$\begin{aligned}\langle A\rangle &= 2\frac{13}{15} - 1\frac{2}{15}\\ &= \frac{26-2}{15} = \frac{8}{5}.\\ \langle A^2\rangle &= 2^2\frac{13}{15} + (-1)^2\frac{2}{15}\\ &= \frac{52+2}{15} = \frac{18}{5}.\end{aligned}$$

La media come baricentro



Pesi sopra i punti; aree proporzionali

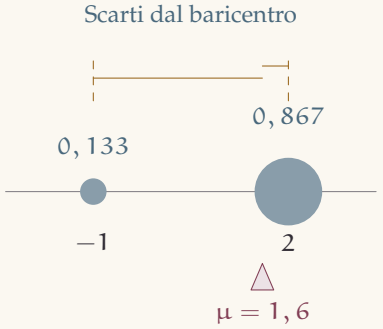
Il valore medio $8/5 = 1{,}6$ è compreso fra -1 e 2.

Passo 9: dispersione

$$(\Delta A)^2 = \frac{18}{5} - \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{90-64}{25} = \frac{26}{25}.$$

Quindi $\Delta A = \sqrt{26}/5 \simeq 1{,}02$. Verifica dagli scarti:

$$\frac{13}{15}\left(2-\frac{8}{5}\right)^2 + \frac{2}{15}\left(-1-\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{13\cdot 4 + 2\cdot 169}{375} = \frac{390}{375} = \frac{26}{25}.$$



Pesi sopra i punti; aree proporzionali

Gli scarti sono $2-8/5 = (10-8)/5 = 2/5$ e $-1-8/5 = (-5-8)/5 = -13/5$; i quadrati sono $4/25$ e $169/25$.

Passo 10: controllo matriciale della media

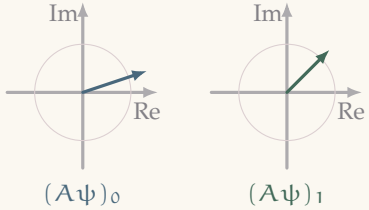
Il prodotto matrice-vettore è

$$A|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2+(1-i)i \\ 2(1+i) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3+i \\ 2+2i \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\langle\psi|A|\psi\rangle &= \frac{1}{5}[2(3+i)+(-i)(2+2i)] \\ &= \frac{1}{5}(6+2i-2i+2) = \frac{8}{5}.\end{aligned}$$

Componenti di $A\psi$



Un piano complesso per componente
Cerchi: modulo uno; stessa scala

Le parti immaginarie si cancellano, come previsto per una forma quadratica hermitiana.

Calcolare le quattro entrate di A^2

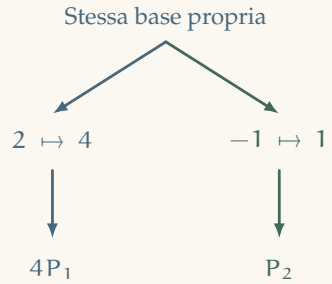
Svolgiamo tutti i prodotti:

$$(A^2)_{11} = 1 \cdot 1 + (1-i)(1+i) = 1 + 2 = 3,$$
$$(A^2)_{12} = 1(1-i) + (1-i)0 = 1-i,$$
$$(A^2)_{21} = (1+i)1 + 0(1+i) = 1+i,$$
$$(A^2)_{22} = (1+i)(1-i) + 0 \cdot 0 = 2.$$

Quindi

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}.$$

Nella base propria, gli autovalori sono $2^2 = 4$ e $(-1)^2 = 1$: i proiettori restano P_1, P_2.



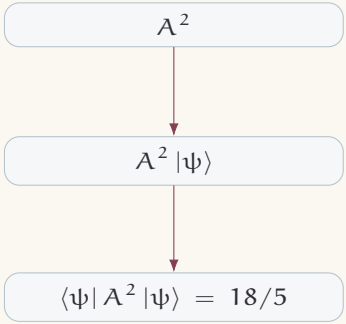
Passo 11: controllo del momento secondo

Moltiplicando A per sé stessa:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1+2 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 6+(1-i)i \\ 2(1+i)+2i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 7+i \\ 2+4i \end{pmatrix}.$$

$$\langle\psi| A^2 |\psi\rangle = \frac{2(7+i) - i(2+4i)}{5} = \frac{18}{5}.$$



Il numeratore finale vale $2(7+i) - i(2+4i) = 14 + 2i - 2i - 4i^2 = 18$: il momento secondo è $18/5$.

Passo 12: lo stato dopo l'esito maggiore

Ottenuto l'esito 2:

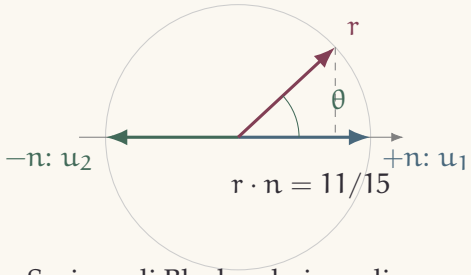
$$P_1 |\psi\rangle = \frac{2+3i}{\sqrt{15}} |u_1\rangle .$$

La norma è $\sqrt{13/15}$. Dividendo:

$$|\psi'\rangle = \frac{2+3i}{\sqrt{13}} |u_1\rangle .$$

Il prefattore ha modulo uno: lo stato fisico è quello di $|u_1\rangle$.

Una seconda misura di A restituisce 2 con certezza e ha dispersione nulla.



Sezione di Bloch nel piano di r, n.
$\theta = \arccos(11/15) \simeq 42{,}83°$
$+n \leftrightarrow 2$, $-n \leftrightarrow -1$

Il prefattore soddisfa $|(2+3i)/\sqrt{13}|^2 = (4+9)/13 = 1$. Una nuova misura dà $|\langle u_1|\psi'\rangle|^2 = 1$ e $|\langle u_2|\psi'\rangle|^2 = 0$.

Lo stato dopo l'esito -1

Per il secondo ramo,

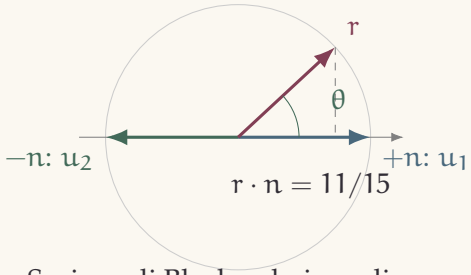
$$P_2 |\psi\rangle = -\frac{2}{\sqrt{30}} |u_2\rangle, \qquad p_2 = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}.$$

La norma è $\sqrt{p_2} = 2/\sqrt{30}$, dunque

$$|\psi_2'\rangle = \frac{-(2/\sqrt{30})\,|u_2\rangle}{2/\sqrt{30}} = -|u_2\rangle.$$

Il segno è una fase globale. Per la misura ripetuta:

$$P(-1) = |-\langle u_2|u_2\rangle|^2 = |-1|^2 = 1,$$
$$P(2) = |-\langle u_1|u_2\rangle|^2 = 0.$$



Sezione di Bloch nel piano di r, n.
$\theta = \arccos(11/15) \simeq 42{,}83°$
$+n \leftrightarrow 2$, $-n \leftrightarrow -1$

Entrambi i rami sono ora determinati. Il simulatore estrae l'esito e conserva lo stato normalizzato del ramo corrispondente.

Realizzare l'analizzatore mediante un cambio di base

Le colonne ortonormali rendono $W = (u_1\ u_2)$ unitaria. Prima della lettura si applica

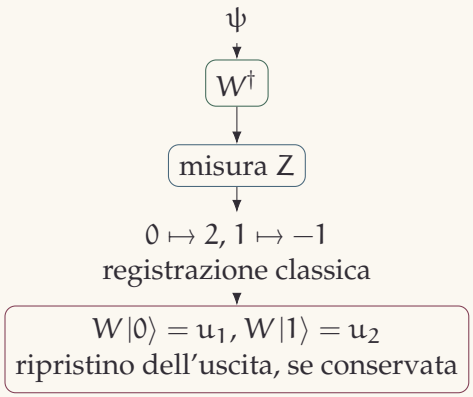
$$W^\dagger = \begin{pmatrix} (1+i)/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ (-1-i)/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Le ampiezze della preparazione diventano

$$(W^\dagger\psi)_0 = \frac{2(1+i)+i}{\sqrt{15}} = \frac{2+3i}{\sqrt{15}},$$

$$(W^\dagger\psi)_1 = \frac{2(-1-i)+2i}{\sqrt{30}} = \frac{-2}{\sqrt{30}}.$$

$$p(0) = \frac{|2+3i|^2}{15} = \frac{13}{15}, \qquad p(1) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}.$$



Se il qubit è conservato, W ripristina gli autostati della misura proiettiva ideale.

Il calcolo ora descrive un esperimento

La geometria individua componenti e trasformazioni. L'algebra consente di calcolarle. La probabilità permette di confrontare la previsione con molte ripetizioni.

Nel simulatore, ogni misura richiede due risultati: la distribuzione degli esiti e lo stato condizionato all'esito estratto.

Gli esempi della prima lezione possono ora essere ricostruiti con gli strumenti sviluppati qui.



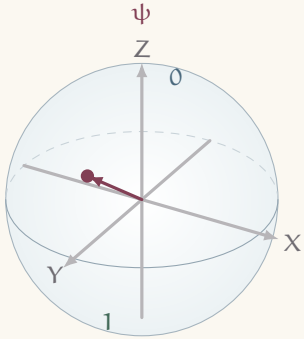
Il formalismo collega una preparazione concreta alle statistiche delle misure successive.

Riferimenti per proseguire

Algebra lineare. Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*: basi, ortogonalità, autovalori e diagonalizzazione.

Probabilità. Joseph K. Blitzstein e Jessica Hwang, *Introduction to Probability*: distribuzioni, condizionamento e variabili congiunte.

Formalismo quantistico. John Preskill, *Lecture Notes for Ph219/CS219*, capitolo 2: stati, osservabili, misura e sistemi composti.



Sfera di Bloch: stati puri

Convenzioni del modulo: prodotto interno lineare nel secondo argomento; basi ortonormali; misure proiettive ideali.

Il calcolo diventa una sequenza di istruzioni

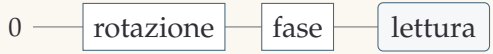
L'esperimento completo ha richiesto una preparazione, un operatore e una regola di lettura. Nel terzo modulo conserveremo gli stessi oggetti matematici, specificando l'ordine in cui un programma li applica ai qubit.

Una preparazione già usata è

$$|\psi\rangle = \frac{2\,|0\rangle + i\,|1\rangle}{\sqrt{5}}.$$

Per generarla da $|0\rangle$ occorrono una rotazione che fissi i moduli e un'operazione che aggiunga la fase i.

Il circuito mostrerà entrambi i passaggi, insieme alle probabilità finali.



Ogni blocco ha un'azione definita sulle ampiezze.

Apri il modulo 3 Ritorna ai fenomeni del modulo 1

Riprendere gli esempi comuni

Questi collegamenti riuniscono i passaggi che collegano i fenomeni del primo modulo ai circuiti del terzo. Gli esempi numerici mantengono le stesse convenzioni.

Ampiezze e notazione di Dirac

Evoluzione e rotazioni

Profili temporali e sovrapposizione

Stato congiunto e previsioni locali

Indice generale Approfondimento sui conteggi Compensazione temporale