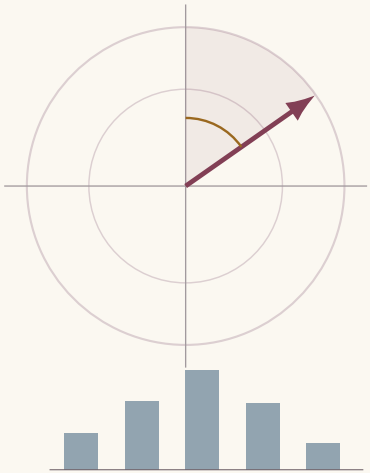
Modulo 01. Fenomeni e simulazione

Simulare il mondo

Fisica e calcolo



Marzio De Corato Danilo Bruschi
Dipartimento di Informatica
"Giovanni Degli Antoni"
Università degli Studi di Milano

Materiale distribuito con licenza CC BY-NC-SA 4.0

Un importante avvertimento iniziale

"Penso di poter affermare tranquillamente che nessuno capisce la meccanica quantistica."

Cosa si intende quando si dice che "capiamo" una cosa? Possiamo immaginare che questo complicato apparato di cose in movimento che chiamiamo "mondo" sia simile a una partita a scacchi giocata dagli dèi, di cui noi siamo spettatori. Non conosciamo le regole del gioco; tutto ciò che ci è permesso è guardare la partita. Naturalmente, se guardiamo abbastanza a lungo, alla fine afferreremo alcune regole di base. Le regole del gioco sono ciò che chiamiamo fisica fondamentale.

Richard P. Feynman, Premio Nobel per la fisica (sviluppo dell'elettrodinamica quantistica)

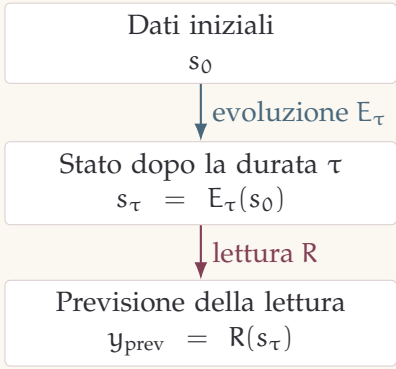
Costruire un simulatore della realtà

Il progetto consiste nel costruire descrizioni con cui un programma possa formulare previsioni controllabili.

Lo *stato* s_0 raccoglie i dati iniziali scelti dal modello. L'evoluzione E_τ li aggiorna dopo una durata τ; la lettura R ricava la grandezza da confrontare.

$$s_\tau = E_\tau(s_0),$$
$$y_{\text{prev}} = R(s_\tau).$$

Stato, evoluzione e lettura dovranno essere precisati per ciascun sistema fisico.



Per la pallina la lettura potrà essere una posizione; per una misura quantistica il modello fornirà probabilità dei possibili esiti.

Quantum Lab nel percorso

Quantum Lab accompagna i quattro moduli con esperimenti simulati. Prima si leggono teoria e svolgimento; poi si modificano i parametri, annotando la previsione e confrontandola con l'uscita del programma.

Una prova conserva la preparazione s_0, l'operazione applicata e il risultato y_{sim}. Cambiando un dato alla volta si può ricostruire la causa della variazione.

Apri la prima attività: dati iniziali e moto.

Il pulsante *Laboratorio* nella fascia inferiore aprirà l'attività della sezione corrente.



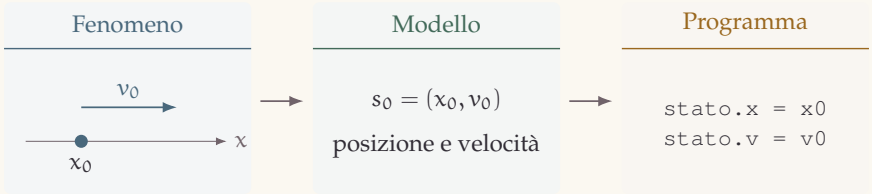
Quantum Lab: indice dei quattro moduli

Preparazione s_0
↓ operazione dichiarata
Risultato simulato y_{sim}

Il laboratorio produce dati simulati. La validazione fisica richiede un confronto con misure sperimentali indipendenti.

Dal fenomeno al modello e al programma

Una stessa preparazione viene descritta a tre livelli. Per una pallina che si muova lungo una retta, x_0 indica la posizione e v_0 la velocità iniziale; lo stato matematico è la coppia $s_0 = (x_0, v_0)$.

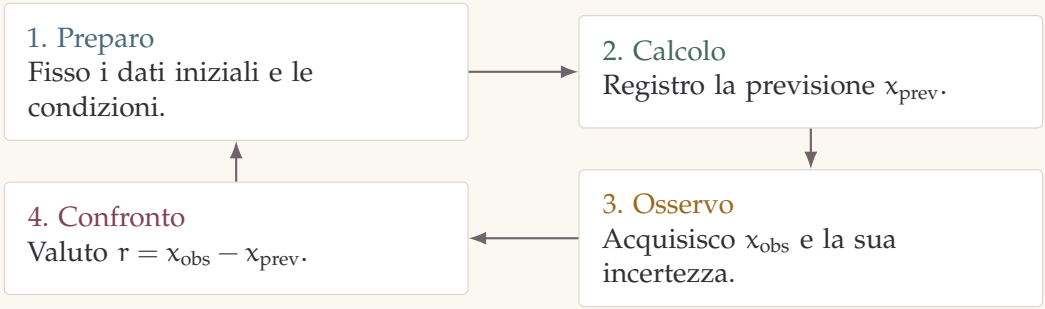


Il programma conserva due numeri associati alle loro unità. La legge fisica scelta stabilirà come aggiornarli; i valori ottenuti saranno tradotti nella posizione prevista sul tavolo.

La geometria del tavolo rappresenta lo spazio fisico. La coppia di dati rappresenta uno stato del modello; la struttura dati ne permette il trattamento nel programma.

Verificare una previsione

Preparazione, previsione e riscontro devono riferirsi alle stesse condizioni. Per una posizione, lo scarto firmato è $r = x_{obs} - x_{prev}$; il suo modulo $|r|$ misura la distanza fra i due valori sulla retta.



Nelle attività simulate si confronta l'uscita del programma con un calcolo di riferimento. Le misure fisiche introducono anche l'incertezza sperimentale.

Scenari di complessità crescente

Le prime attività stabiliscono quali dati conservare. Onde, misure quantistiche e sistemi composti richiederanno poi rappresentazioni capaci di descrivere fase, probabilità e correlazioni.

Posizione e velocità



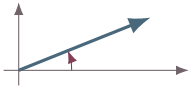
$s = (x, v)$

Distribuzioni di dati



pesi degli stati iniziali possibili

Ampiezze e fasi



lunghezza e orientazione

Stati congiunti



esiti comuni e correlazioni

La sequenza è didattica: una distribuzione classica esprime un'incertezza sui dati; le ampiezze quantistiche seguono regole introdotte nelle sezioni successive.

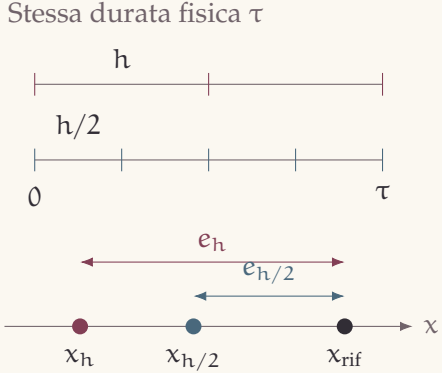
Controllare il calcolo numerico

Fissiamo modello, dati iniziali e istante finale τ. Il programma può approssimare l'evoluzione con passi temporali di durata h.

Indichiamo con $x_h(\tau)$ la posizione calcolata e con $x_{\text{rif}}(\tau)$ una soluzione di riferimento dello stesso problema.

$$e_h = \left| x_h(\tau) - x_{\text{rif}}(\tau) \right|.$$

Si ripete il calcolo con $h/2$, confrontando gli errori e controllando anche la precisione aritmetica.



Schema di un confronto convergente

La prima sezione svolge il confronto per un moto accelerato. Nel moto uniforme l'aggiornamento $x \leftarrow x + vh$ è esatto in aritmetica esatta.

Rappresentare l'incertezza dei dati

Anche quando il modello e il calcolo siano adeguati, la preparazione può ammettere più stati iniziali.

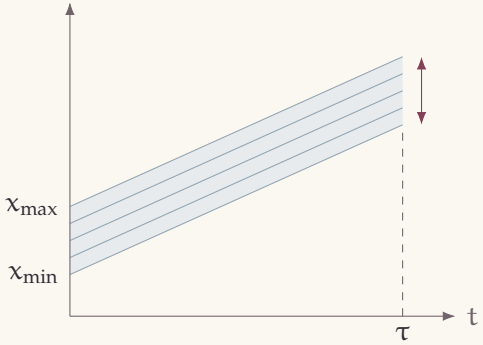
Se si conosce soltanto un intervallo per la posizione, si scrive

$$x_0 \in [x_{\min}, x_{\max}].$$

Ogni valore ammesso avvia una traiettoria. Nel diagramma la velocità è la stessa per tutte le preparazioni: la fascia mantiene la propria larghezza durante il moto.

Attribuire probabilità ai valori dell'intervallo richiede un'ipotesi aggiuntiva sulla loro distribuzione.

Piano tempo–posizione
velocità comune e costante



La larghezza della fascia esprime l'intervallo delle posizioni.

Ridurre il passo di calcolo migliora l'approssimazione numerica quando il metodo converge; l'intervallo dei dati iniziali dipende dalla preparazione.

Valutare le ipotesi del modello

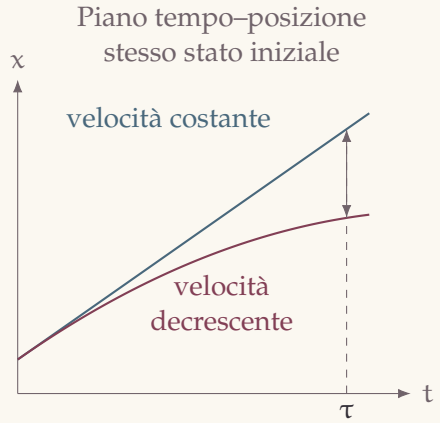
Un modello vale sotto ipotesi dichiarate. Per una pallina, trascurare l'attrito conduce a una velocità costante; una resistenza al moto può invece ridurla.

Si confrontano i residui

$$r(t) = x_{\text{obs}}(t) - x_{\text{prev}}(t)$$

a più istanti, tenendo conto dell'incertezza delle misure. Uno scostamento sistematico suggerisce di esaminare le interazioni trascurate.

Le ipotesi rivedute devono produrre previsioni controllabili anche con nuovi dati.



Curve teoriche illustrative;
il confronto fisico richiede misure.

Un residuo isolato può avere cause diverse. Le prove successive esamineranno separatamente calcolo, preparazione e descrizione fisica.

Il percorso del modulo

I La simulazione classica

II La simulazione statistica

III Onde e interferenza

IV L'interferenza di particelle singole

V Stati a due alternative

VI Il calcolo quantistico

VII Due qubit e stati congiunti

VIII Ambiente e perdita di interferenza

IX Informazione e irreversibilità

S Sintesi: il progetto di simulazione

X Come si costruisce un computer quantistico

XI Dalla meccanica quantistica al calcolo quantistico

Guida alla lettura

Quantum Lab: attività del modulo 1

I titoli aprono le sezioni; i collegamenti inferiori riportano all'indice e alle attività. Le frecce scorrono le pagine.

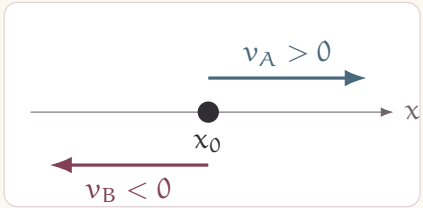
Il primo scenario: una pallina sul tavolo

Ripartiamo da una preparazione familiare. Due palline possono occupare lo stesso punto x_0 e muoversi in versi opposti.

La freccia rappresenta la velocità: il verso distingue $v_A > 0$ da $v_B < 0$. Quando l'interazione con il tavolo è trascurabile nell'intervallo considerato, ciascuna velocità rimane costante.

La prima sezione costruisce lo stato (x_0, v_0) e ricava la previsione del moto. Un'attività svolta permetterà poi di confrontare i due casi in Quantum Lab.

Due preparazioni, stessa posizione

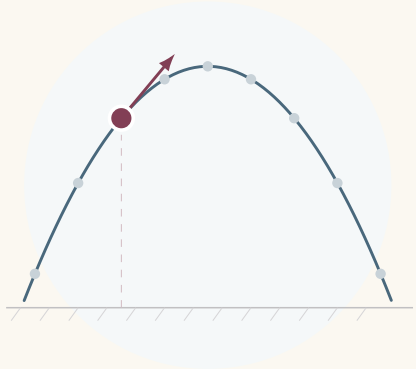


Spazio fisico: moto lungo una retta
frecce di velocità in versi opposti

L'asse è una coordinata sul tavolo; le frecce indicano velocità. Dimensioni e rotazione della pallina sono trascurate nel modello puntiforme.

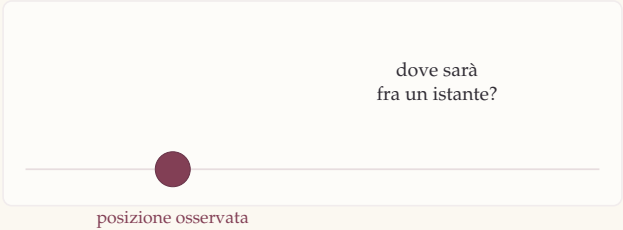
PARTE I

La simulazione classica



Prevedere il moto di una pallina

Una pallina si trova in un punto del tavolo. Registriamo la sua posizione in un dato istante e vogliamo prevedere dove sarà dopo un breve intervallo di tempo.



La posizione osservata è sufficiente per prevedere il moto?

Nel modello rappresentiamo la pallina con un punto, trascurandone dimensioni e rotazione.

Una posizione iniziale non determina il moto

Si vuole calcolare la posizione di una pallina negli istanti successivi. Il punto occupato sul tavolo non determina da solo il seguito: stati con la stessa posizione e velocità differenti producono traiettorie differenti.



I dati necessari a distinguere due moti

Due palline occupano lo stesso punto e si muovono in direzioni opposte. Quale descrizione permette di prevedere due evoluzioni diverse?

Sola posizione

Il programma conserva il punto occupato dalla pallina. Possiamo ridurre l'intervallo fra due aggiornamenti del calcolo.

Posizione e velocità

Il programma conserva anche rapidità e direzione del moto. La legge del moto indica come aggiornare queste grandezze.

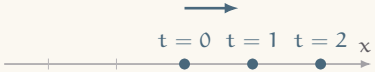
Confrontiamo la previsione del passo successivo nelle due descrizioni.

Riscontro commentato: posizione e velocità nel modello del moto.

Lo stato classico della particella

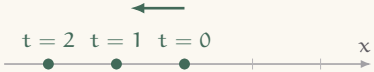
Le due palline partono da $x = 0$ con velocità opposte. La figura riunisce i tre istanti $t = 0, 1, 2$: a ogni passo cambia la posizione, mentre la velocità resta costante. Le tabelle riportano i dati che il programma conserva per prevedere il seguito.

Preparazione 1: $v = 1$



t	x	v
0	0	1
1	1	1
2	2	1

Preparazione 2: $v = -1$



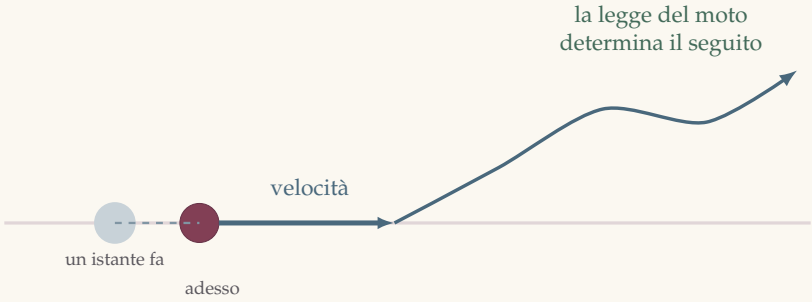
t	x	v
0	0	−1
1	−1	−1
2	−2	−1

Tre istanti della stessa evoluzione; unità convenzionali. I punti e la tabella usano $x(t) = vt$.

Moto rettilineo uniforme, stessi dati della presentazione. Halliday–Resnick, capp. 2 e 5.

Stima della velocità da osservazioni successive

Due fotografie, separate da un intervallo di tempo noto, mostrano lo spostamento della pallina. Il rapporto fra spostamento e intervallo fornisce una velocità media, utile per stimare quella iniziale quando l'intervallo è abbastanza breve.



Dallo stato fisico alla struttura dati

Nel modello puntiforme, posizione e velocità descrivono lo stato corrente. La legge del moto specifica come aggiornarle. Nel programma le grandezze occupano campi distinti: il loro significato fisico permette di interpretare ogni numero e di controllare il risultato del calcolo.

Grandezze del sistema



la forza scelta stabilisce
come cambiano i dati

Campi della struttura dati

campo	valore
posizione	1
velocità	1
istante	0

l'archivio raccoglierà
gli stati calcolati

Dati iniziali del moto uniforme già usato. Stato corrente e archivio della traiettoria hanno funzioni distinte.

Halliday–Resnick–Walker, *Fundamentals of Physics*, capp. 2 e 5. Esempi del modello.

Aggiornamento dello stato e archivio della traiettoria

Per seguire il moto uniforme ripartiamo da $x_0 = 0$, con $v = 1$: la scheda precedente mostrava la diversa inizializzazione $x_0 = 1$. Un passo aumenta tempo e posizione di una unità. Lo stato viene aggiornato; l'archivio mantiene anche i valori precedenti per ricostruire la traiettoria.

Aggiornare lo stato corrente

$t = 0, \quad x = 0, \quad v = 1$

↓

$t = 1, \quad x = 1, \quad v = 1$

↓

$t = 2, \quad x = 2, \quad v = 1$

Conservare la traiettoria

istante	posizione
0	0
1	1
2	2

Ogni aggiornamento aggiunge una riga all'archivio.

Lo stato corrente serve al passo successivo; l'archivio raccoglie i dati già prodotti. Esempio in unità convenzionali.

Tre aggiornamenti dello stesso esempio della presentazione, con $v = 1$.

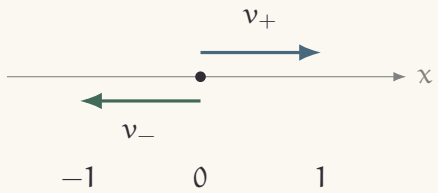
La velocità completa la descrizione del moto

Conservando soltanto la posizione, assegniamo gli stessi dati alle due palline. Un intervallo di calcolo più breve lascia irrisolta questa differenza. Per un moto uniforme, $x(t) = x_0 + vt$. Con $x_0 = 0$, dopo un secondo:

$$v_+ = 1\,\mathrm{m/s} \;\Rightarrow\; x_+(1) = 0 + 1 \cdot 1 = 1\,\mathrm{m},$$

$$v_- = -1\,\mathrm{m/s} \;\Rightarrow\; x_-(1) = 0 - 1 \cdot 1 = -1\,\mathrm{m}.$$

Posizione, velocità e legge del moto permettono di calcolare l'evoluzione.



Stessa posizione iniziale; posizioni diverse dopo 1 s.

Con dati iniziali incerti si confrontano più preparazioni compatibili; l'errore numerico si valuta separatamente. Riferimento: Halliday–Resnick, capp. 2 e 5.

Misurare la velocità media

Due osservazioni dello stesso moto forniscono $x_A = 0{,}20\,\mathrm{m}$ a $t_A = 0$ e $x_B = 0{,}50\,\mathrm{m}$ a $t_B = 0{,}15\,\mathrm{s}$.

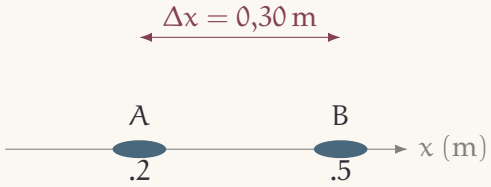
$$\Delta x = 0{,}50 - 0{,}20 = 0{,}30\,\mathrm{m},$$

$$\Delta t = 0{,}15 - 0 = 0{,}15\,\mathrm{s}.$$

La velocità media sul tratto è

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0{,}30}{0{,}15} = \frac{30}{15} = 2\,\mathrm{m/s}.$$

Se la velocità varia poco nell'intervallo, il rapporto fornisce anche una stima della velocità iniziale.



$t_A = 0$ $\quad$ $t_B = 0{,}15\,\mathrm{s}$

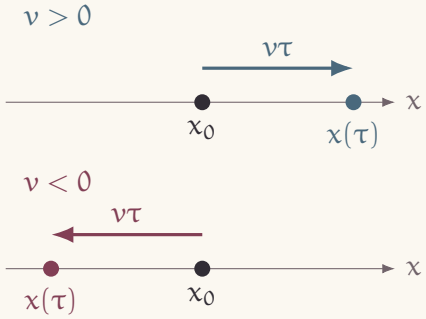
Il rapporto descrive l'intervallo osservato; una velocità istantanea richiede intervalli sempre più brevi.

Dalla velocità alla posizione

Applichiamo ora la definizione di velocità a un moto rettilineo uniforme. L'origine dei tempi è $t = 0$; $\tau > 0$ è la durata della previsione.

$$\begin{aligned} v &= \frac{x(\tau) - x_0}{\tau}, \\ v\tau &= x(\tau) - x_0, \\ x_0 + v\tau &= x(\tau). \end{aligned}$$

La seconda riga moltiplica entrambi i membri per τ; la terza aggiunge x_0 a entrambi. Lo spostamento $v\tau$ ha unità $m/s \cdot s = m$.



Spostamenti sulla retta fisica

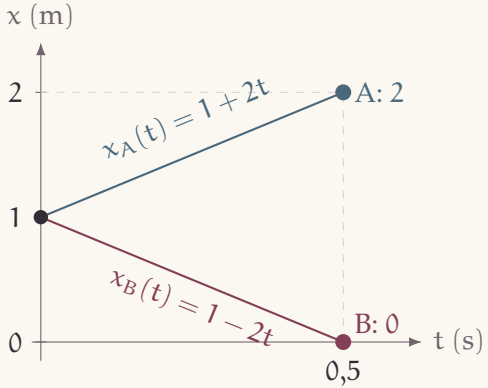
Il segno di $v\tau$ determina il verso dello spostamento. La durata fisica τ è distinta dal passo h di un eventuale integratore numerico.

Due previsioni, tutti i passaggi

Fissiamo $x_0 = 1\,\mathrm{m}$, $\tau = 0{,}5\,\mathrm{s}$, $v_A = +2\,\mathrm{m/s}$ e $v_B = -2\,\mathrm{m/s}$.

$$\begin{aligned}
\Delta x_A &= (+2\,\mathrm{m/s})(0{,}5\,\mathrm{s}) \\
&= +1\,\mathrm{m}, \\
x_A(\tau) &= 1\,\mathrm{m} + 1\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m}; \\
\Delta x_B &= (-2\,\mathrm{m/s})(0{,}5\,\mathrm{s}) \\
&= -1\,\mathrm{m}, \\
x_B(\tau) &= 1\,\mathrm{m} - 1\,\mathrm{m} = 0\,\mathrm{m}.
\end{aligned}$$

Le due previsioni distano $|2 - 0|\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m}$.



t in secondi, x in metri

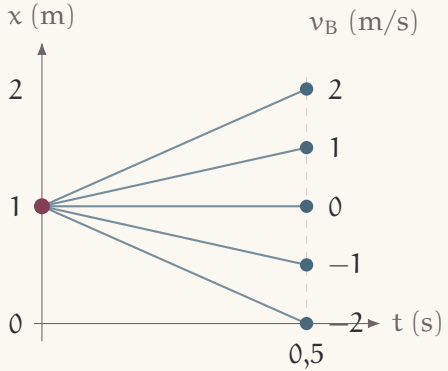
Nel piano tempo–posizione l'inclinazione di ciascuna retta esprime la velocità. Gli estremi a 0,5 s coincidono con le posizioni calcolate.

Il confronto in Quantum Lab

In *Il moto*, impostare posizione 1 m, velocità A 2 m/s, velocità B -2 m/s e incertezza 0. Premere *Un passo · 0,5 s*: si ritrovano $x_A = 2\,\text{m}$ e $x_B = 0\,\text{m}$.

Variare poi la sola velocità B. Ogni modifica riporta il tempo a zero: ripetere il passo e confrontare la posizione con i conti seguenti.

v_B (m/s)	$x_B(0{,}5\,\text{s})$ (m)
-2	$1 + (-2)\cdot 0{,}5 = 1 - 1 = 0$
-1	$1 + (-1)\cdot 0{,}5 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$
0	$1 + 0\cdot 0{,}5 = 1 + 0 = 1$
1	$1 + 1\cdot 0{,}5 = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$
2	$1 + 2\cdot 0{,}5 = 1 + 1 = 2$



Ogni retta mantiene la propria velocità.

I cursori ammettono ulteriori valori. Con velocità uguali le traiettorie coincidono; i dati visualizzati sono risultati del modello di moto uniforme.

La variazione della velocità

Consideriamo ora una nuova preparazione: $x_0 = 1\,\mathrm{m}$, $v_0 = 0$, con accelerazione costante. La velocità raggiunge $0{,}25\,\mathrm{m/s}$ dopo $0{,}25\,\mathrm{s}$.

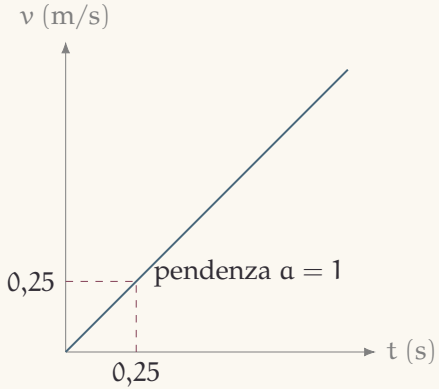
$$\Delta v = 0{,}25 - 0 = 0{,}25\,\mathrm{m/s},$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0{,}25}{0{,}25} = 1\,\mathrm{m/s^2}.$$

Moltiplicando per la durata del passo:

$$\Delta v = a\Delta t, \qquad v_{k+1} = v_k + a\Delta t.$$

L'indice k conta gli aggiornamenti.



L'accelerazione esprime la variazione della velocità per unità di tempo. Fonte: Halliday, §2.3.

Un passo di Eulero per posizione e velocità

Manteniamo $x_0 = 1\,\mathrm{m}$, $v_0 = 0$ e $a = 1\,\mathrm{m/s^2}$. Durante ciascun passo Eulero usa la velocità all'inizio dell'intervallo per approssimare lo spostamento:

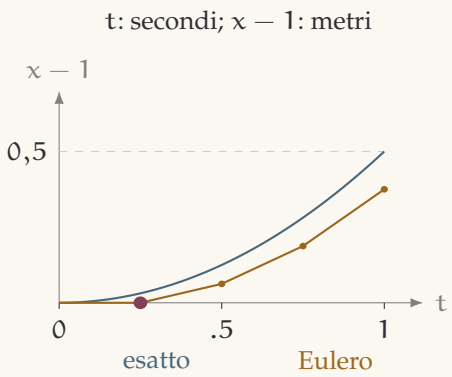
$$\Delta x_k \simeq v_k \Delta t, \qquad x_{k+1} = x_k + v_k \Delta t.$$

Per la velocità, l'accelerazione costante dà

$$v_{k+1} = v_k + a\Delta t, \qquad t_{k+1} = t_k + \Delta t.$$

Con quattro passi fino a un secondo:

$$\Delta t = \frac{1\,\mathrm{s}}{4} = 0{,}25\,\mathrm{s}.$$



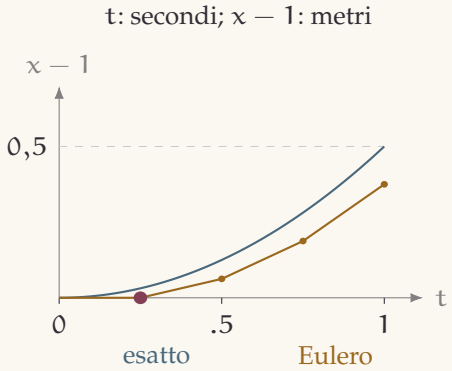
I due aggiornamenti usano entrambi lo stato all'inizio del passo; la posizione non usa la velocità appena aggiornata.

Eulero: aggiornamento 1 di quattro

All'inizio del passo $k = 0$ lo stato è $t_0 = 0\,\text{s}$, $x_0 = 1\,\text{m}$, $v_0 = 0\,\text{m/s}$. Il passo rimane $0{,}25\,\text{s}$.

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 0 \cdot 0{,}25 \\ &= 1 + 0 = 1\,\text{m}, \\ v_1 &= 0 + 1 \cdot 0{,}25 \\ &= 0 + 0{,}25 = 0{,}25\,\text{m/s}, \\ t_1 &= 0 + 0{,}25 = 0{,}25\,\text{s}. \end{aligned}$$

La posizione calcolata individua il punto rosso della traiettoria numerica.



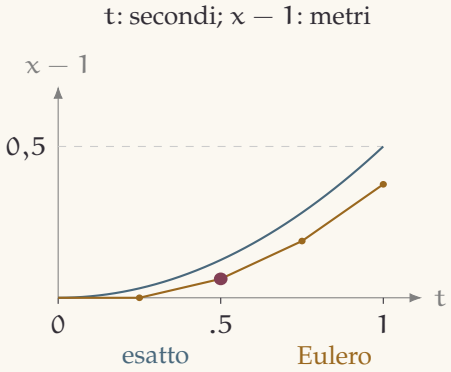
Il dato in uscita viene conservato come ingresso dell'aggiornamento successivo.

Eulero: aggiornamento 2 di quattro

All'inizio del passo $k = 1$ lo stato è $t_1 = 0{,}25\,\mathrm{s}$, $x_1 = 1\,\mathrm{m}$, $v_1 = 0{,}25\,\mathrm{m/s}$. Il passo rimane $0{,}25\,\mathrm{s}$.

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 + 0{,}25 \cdot 0{,}25 \\ &= 1 + 0{,}0625 = 1{,}0625\,\mathrm{m}, \\ v_2 &= 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}25 \\ &= 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}50\,\mathrm{m/s}, \\ t_2 &= 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}50\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$

La posizione calcolata individua il punto rosso della traiettoria numerica.



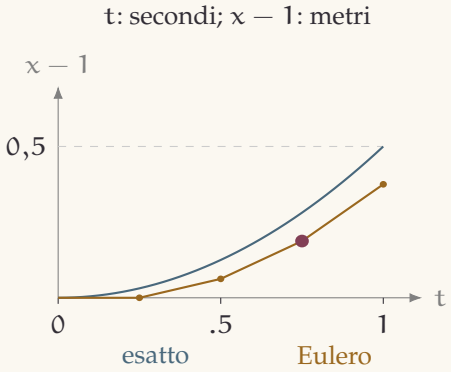
Il dato in uscita viene conservato come ingresso dell'aggiornamento successivo.

Eulero: aggiornamento 3 di quattro

All'inizio del passo $k = 2$ lo stato è $t_2 = 0{,}50\,\mathrm{s}$, $x_2 = 1{,}0625\,\mathrm{m}$, $v_2 = 0{,}50\,\mathrm{m/s}$. Il passo rimane $0{,}25\,\mathrm{s}$.

$$\begin{aligned} x_3 &= 1{,}0625 + 0{,}50 \cdot 0{,}25 \\ &= 1{,}0625 + 0{,}125 = 1{,}1875\,\mathrm{m}, \\ v_3 &= 0{,}50 + 1 \cdot 0{,}25 \\ &= 0{,}50 + 0{,}25 = 0{,}75\,\mathrm{m/s}, \\ t_3 &= 0{,}50 + 0{,}25 = 0{,}75\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$

La posizione calcolata individua il punto rosso della traiettoria numerica.



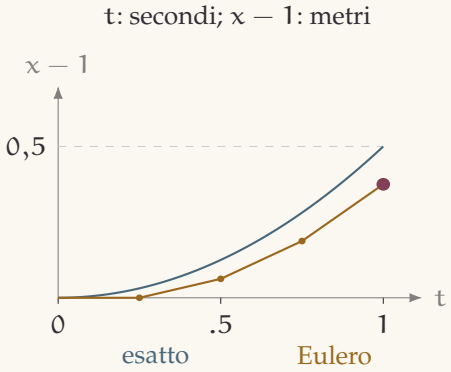
Il dato in uscita viene conservato come ingresso dell'aggiornamento successivo.

Eulero: aggiornamento 4 di quattro

All'inizio del passo $k = 3$ lo stato è $t_3 = 0{,}75\,\text{s}$, $x_3 = 1{,}1875\,\text{m}$, $v_3 = 0{,}75\,\text{m/s}$. Il passo rimane $0{,}25\,\text{s}$.

$$\begin{aligned} x_4 &= 1{,}1875 + 0{,}75 \cdot 0{,}25 \\ &= 1{,}1875 + 0{,}1875 = 1{,}375\,\text{m}, \\ v_4 &= 0{,}75 + 1 \cdot 0{,}25 \\ &= 0{,}75 + 0{,}25 = 1\,\text{m/s}, \\ t_4 &= 0{,}75 + 0{,}25 = 1\,\text{s}. \end{aligned}$$

La posizione calcolata individua il punto rosso della traiettoria numerica.



Il dato in uscita viene conservato come ingresso dell'aggiornamento successivo.

La soluzione esatta attraverso l'area

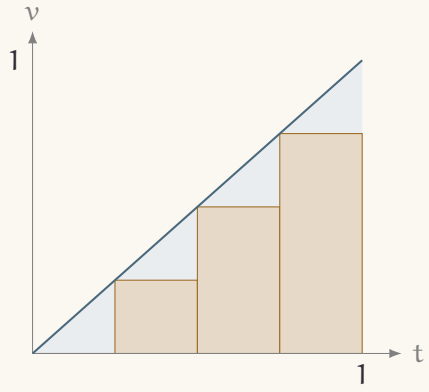
Per gli stessi dati $x_0 = 1$, $v_0 = 0$, $a = 1$ in unità SI, l'accelerazione costante produce $v(t) = t$. Lo spostamento è l'area sotto il grafico della velocità. Il triangolo ha base t e altezza t:

$$x(t) - x_0 = \frac{t \cdot t}{2} = \frac{t^2}{2}, \qquad x(t) = 1 + \frac{t^2}{2}.$$

A un secondo:

$$x(1) = 1 + \frac{1^2}{2} = 1 + 0{,}5 = 1{,}5\,\text{m}.$$

Eulero somma invece le aree dei rettangoli con altezza uguale alla velocità iniziale di ciascun passo.



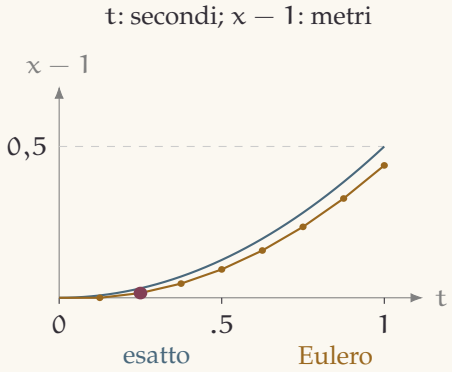
Il grafico della velocità collega la soluzione esatta e l'approssimazione alle rispettive aree.

Otto passi: aggiornamenti 1 e 2

Lo stesso moto parte da $x_0 = 1\,\text{m}$, $v_0 = 0$ e ha $a = 1\,\text{m/s}^2$. Usiamo $\Delta t = 0{,}125\,\text{s}$; i valori di posizione e velocità sono in SI.

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 0 \cdot 0{,}125 \\ &= 1 + 0 = 1, \\ v_1 &= 0 + 0{,}125 = 0{,}125. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 + 0{,}125 \cdot 0{,}125 \\ &= 1 + 0{,}015625 = 1{,}015625, \\ v_2 &= 0{,}125 + 0{,}125 = 0{,}25. \end{aligned}$$

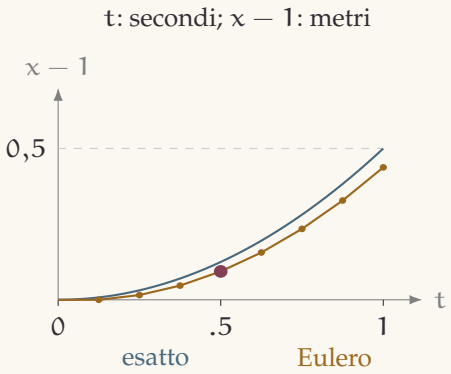


Dopo questi passi l'istante è $t = 0{,}25\,\text{s}$; il punto rosso identifica la posizione raggiunta.

Otto passi: aggiornamenti 3 e 4

Lo stesso moto parte da $x_0 = 1\,\mathrm{m}$, $v_0 = 0$ e ha $a = 1\,\mathrm{m/s^2}$. Usiamo $\Delta t = 0{,}125\,\mathrm{s}$; i valori di posizione e velocità sono in SI.

$$\begin{aligned} x_3 &= 1{,}015625 + 0{,}25 \cdot 0{,}125 \\ &= 1{,}015625 + 0{,}03125 = 1{,}046875, \\ v_3 &= 0{,}25 + 0{,}125 = 0{,}375. \\ x_4 &= 1{,}046875 + 0{,}375 \cdot 0{,}125 \\ &= 1{,}046875 + 0{,}046875 = 1{,}09375, \\ v_4 &= 0{,}375 + 0{,}125 = 0{,}5. \end{aligned}$$

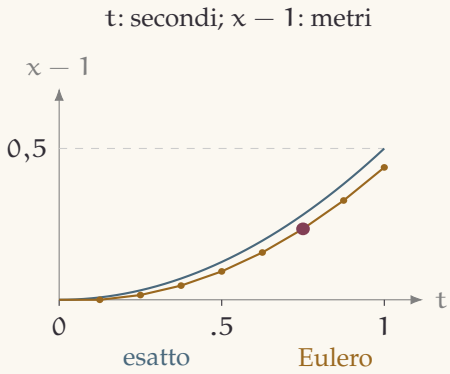


Dopo questi passi l'istante è $t = 0{,}5\,\mathrm{s}$; il punto rosso identifica la posizione raggiunta.

Otto passi: aggiornamenti 5 e 6

Lo stesso moto parte da $x_0 = 1\,\mathrm{m}$, $v_0 = 0$ e ha $a = 1\,\mathrm{m/s^2}$. Usiamo $\Delta t = 0{,}125\,\mathrm{s}$; i valori di posizione e velocità sono in SI.

$$\begin{aligned} x_5 &= 1{,}09375 + 0{,}5 \cdot 0{,}125 \\ &= 1{,}09375 + 0{,}0625 = 1{,}15625, \\ v_5 &= 0{,}5 + 0{,}125 = 0{,}625. \\ x_6 &= 1{,}15625 + 0{,}625 \cdot 0{,}125 \\ &= 1{,}15625 + 0{,}078125 = 1{,}234375, \\ v_6 &= 0{,}625 + 0{,}125 = 0{,}75. \end{aligned}$$

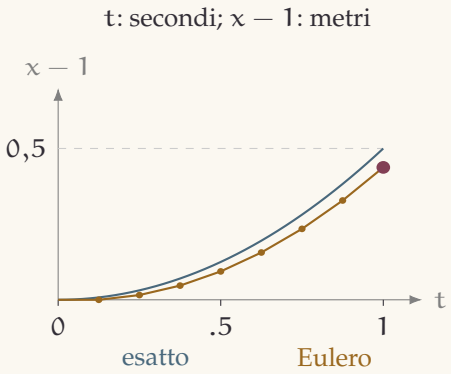


Dopo questi passi l'istante è $t = 0{,}75\,\mathrm{s}$; il punto rosso identifica la posizione raggiunta.

Otto passi: aggiornamenti 7 e 8

Lo stesso moto parte da $x_0 = 1\,\text{m}$, $v_0 = 0$ e ha $a = 1\,\text{m/s}^2$. Usiamo $\Delta t = 0{,}125\,\text{s}$; i valori di posizione e velocità sono in SI.

$$\begin{aligned} x_7 &= 1{,}234375 + 0{,}75 \cdot 0{,}125 \\ &= 1{,}234375 + 0{,}09375 = 1{,}328125, \\ v_7 &= 0{,}75 + 0{,}125 = 0{,}875. \\ x_8 &= 1{,}328125 + 0{,}875 \cdot 0{,}125 \\ &= 1{,}328125 + 0{,}109375 = 1{,}4375, \\ v_8 &= 0{,}875 + 0{,}125 = 1. \end{aligned}$$



Dopo questi passi l'istante è $t = 1\,\text{s}$; il punto rosso identifica la posizione raggiunta.

Confrontare i due passi allo stesso istante

La soluzione esatta a $t = 1\,\mathrm{s}$ vale 1,5 m. Le due esecuzioni hanno gli stessi dati iniziali e differiscono soltanto per il passo.

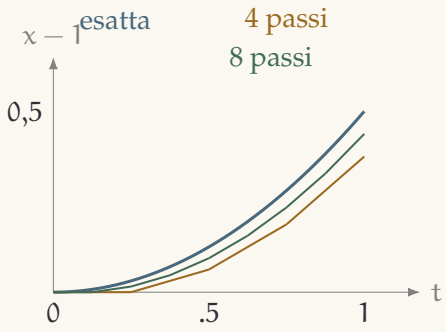
$$\varepsilon_4 = |1{,}375 - 1{,}5| = 0{,}125\,\mathrm{m},$$

$$\varepsilon_8 = |1{,}4375 - 1{,}5| = 0{,}0625\,\mathrm{m}.$$

Il rapporto fra gli scarti è

$$\frac{\varepsilon_8}{\varepsilon_4} = \frac{0{,}0625}{0{,}125} = \frac{1}{2}.$$

Il dimezzamento osservato riguarda questo modello e il metodo impiegato.



t: secondi; $x - 1$: metri.

La precisione si valuta confrontando la stessa grandezza al medesimo istante.

Integrazione numerica della dinamica

Eulero usa i dati correnti per calcolare quelli del passo successivo. Partiamo da un metro, con velocità nulla e accelerazione costante. Il quadro confronta i primi aggiornamenti e i risultati dopo un secondo: dimezzare il passo avvicina la traiettoria numerica alla soluzione esatta di questo esempio.

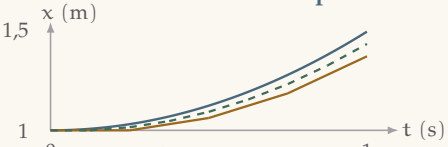
Dati e primo aggiornamento

$$x_0 = 1\,\mathrm{m},\ v_0 = 0,\ a = 1\,\mathrm{m/s^2}$$
$$x_{k+1} = x_k + v_k \Delta t$$
$$v_{k+1} = v_k + a\Delta t$$

$\Delta t = 0{,}25\,\mathrm{s}$:
$x_1 = 1 + 0 \cdot 0{,}25 = 1\,\mathrm{m}$;
$v_1 = 0 + 1 \cdot 0{,}25 = 0{,}25\,\mathrm{m/s}$.

$\Delta t = 0{,}125\,\mathrm{s}$:
$x_1 = 1\,\mathrm{m}$, $v_1 = 0{,}125\,\mathrm{m/s}$.

Confronto allo stesso tempo $t = 1\,\mathrm{s}$



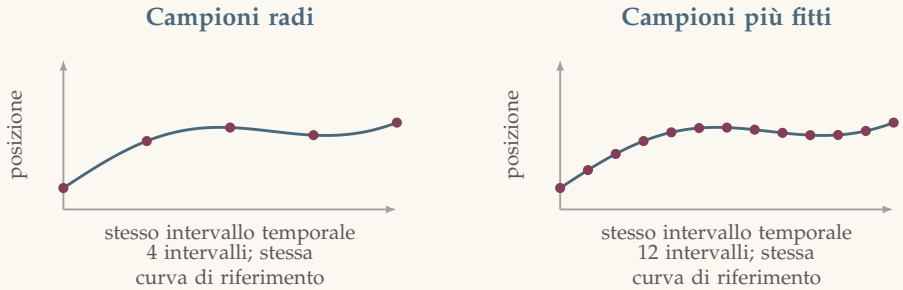
Blu: esatta 1,5 m.
Ocra: 4 passi, 1,375 m.
Verde tratteggiato: 8 passi, 1,4375 m.

k conta i passi; $t_k = k\Delta t$. La posizione usa v_k. Soluzione esatta: $x(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2$ in unità SI.

Moto uniformemente accelerato. Halliday–Resnick–Walker, capp. 2 e 5.

Risoluzione temporale della traiettoria

Campionare una curva significa registrarne i valori in alcuni istanti. Riducendo l'intervallo fra i campioni otteniamo una rappresentazione più dettagliata. L'errore di un metodo di integrazione si valuta invece confrontando la traiettoria calcolata con una soluzione di riferimento.



Punti sulla stessa curva nota. Qui varia soltanto la risoluzione del campionamento.

Halliday–Resnick–Walker, *Fundamentals of Physics*, capp. 2 e 5. Esempi del modello.

Esempio: due aggiornamenti di mezzo secondo

Manteniamo $x_0 = 1\,\mathrm{m}$, $v_0 = 0$ e $a = 1\,\mathrm{m/s^2}$. Con $h = 0{,}5\,\mathrm{s}$, Eulero esplicito usa i dati precedenti in entrambe le equazioni:

$$x_1 = 1 + 0 \cdot 0{,}5 = 1\,\mathrm{m},$$

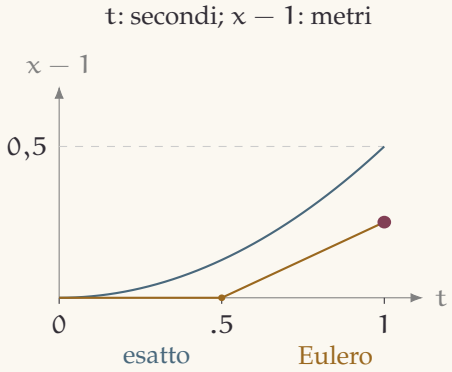
$$v_1 = 0 + 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5\,\mathrm{m/s}.$$

Al secondo aggiornamento:

$$x_2 = 1 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 1{,}25\,\mathrm{m},$$

$$v_2 = 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 = 1\,\mathrm{m/s}.$$

A un secondo, lo scarto è $|1{,}25 - 1{,}50| = 0{,}25\,\mathrm{m}$.



La velocità finale è esatta per accelerazione costante; la posizione accumula l'errore degli intervalli.

Esprimere la posizione dopo n intervalli

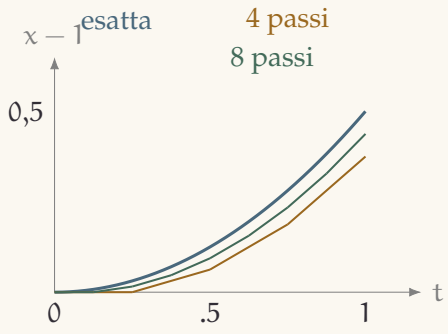
Usiamo i valori numerici nelle unità del caso: $h = 1/n$, $v_0 = 0$, $a = 1$. La ricorrenza $v_{k+1} = v_k + 1/n$ dà $v_k = k/n$ per induzione. Pertanto

$$x_{k+1} - x_k = v_k h = \frac{k}{n^2}.$$

Sommando per $k = 0, \ldots, n-1$, i termini intermedi si cancellano:

$$x_n - x_0 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k.$$

La pagina seguente valuta esplicitamente questa somma aritmetica.



t: secondi; $x - 1$: metri.

La somma degli spostamenti ricostruisce la posizione; l'unità della posizione resta il metro.

Calcolare la somma degli indici degli intervalli

Poniamo $S = 0 + 1 + \cdots + (n-1)$. Scriviamo la stessa somma in ordine inverso e sommiamo termine a termine:

$$S = 0 + 1 + \cdots + (n-1),$$
$$S = (n-1) + (n-2) + \cdots + 0.$$

Ci sono n coppie, ciascuna con somma $n-1$, quindi

$$2S = n(n-1), \qquad S = \frac{n(n-1)}{2}.$$

La relazione $x_n - x_0 = S/n^2$ determina ora la posizione finale per ogni numero n di intervalli.



t: secondi; $x - 1$: metri.

L'identità vale anche per n=1: la sola somma dell'indice zero dà S=0.

La legge dell'errore nel caso ad accelerazione costante

Sostituendo la somma aritmetica e $x_0 = 1$:

$$x_n = 1 + \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}$$
$$= 1 + \frac{n-1}{2n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2n}.$$

Il valore esatto è $x(1) = 3/2$. Per $n > 0$,

$$\varepsilon_n = \left|\frac{3}{2} - \frac{1}{2n} - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2n}.$$

Quindi $\varepsilon_2 = 1/4 = 0{,}25$, $\varepsilon_4 = 1/8 = 0{,}125$ e $\varepsilon_8 = 1/16 = 0{,}0625$ metri.



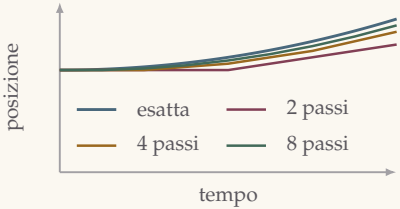
t: secondi; $x - 1$: metri.

Nel modello svolto, raddoppiare n dimezza lo scarto finale. La formula consente di leggere la tabella successiva.

Verificare l'approssimazione numerica

Riprendiamo il caso con $x_0 = 1\,\mathrm{m}$, $v_0 = 0$ e $a = 1\,\mathrm{m/s^2}$. Il tempo finale resta un secondo; aumentiamo il numero di passi. L'errore è la distanza fra la posizione calcolata e quella esatta nello stesso istante. Con quattro passi otteniamo $|1{,}375 - 1{,}500| = 0{,}125\,\mathrm{m}$.

Confrontare tre passi di calcolo



Misurare lo scostamento

passi	errore a $t = 1$
2	0,2500
4	0,1250
8	0,0625

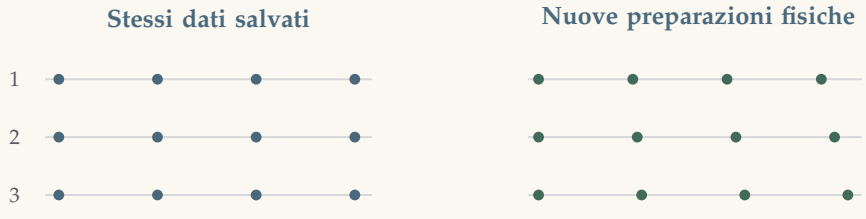
raddoppiando i passi, in questo esempio l'errore si dimezza

Tempo in secondi, posizione in metri. Eulero esplicito: $\Delta t = 1/n$; soluzione esatta $x(t) = 1 + t^2/2$.

Eulero esplicito nel caso svolto: con n passi in un secondo, l'errore finale è $1/(2n)$ metri.

Ripetere il calcolo, ripetere l'esperimento

Ripartire dagli stessi numeri permette di ripetere l'esecuzione del programma. Preparare nuovamente il sistema fisico comporta invece una precisione finita. Confrontiamo questi due tipi di ripetizione per riconoscere quali differenze debbano entrare nei dati del simulatore.



Punti illustrativi a istanti uguali. A sinistra le tre sequenze coincidono; a destra cambiano i dati di partenza.

Halliday–Resnick–Walker, *Fundamentals of Physics*, capp. 2 e 5. Esempi del modello.

Salvare lo stato e riprendere il calcolo

Interrompiamo il calcolo dopo due passi e salviamo posizione, velocità e istante. Ricaricando quei dati, con lo stesso metodo, passo e precisione numerica, possiamo eseguire i due passi rimanenti. Il risultato coincide con quello dell'esecuzione continua: il salvataggio conserva le informazioni necessarie a proseguire questo modello.

Esecuzione continua	Esecuzione interrotta e ripresa
$t = 0, \quad x = 1, \quad v = 0$	$t = 0, \quad x = 1, \quad v = 0$
↓ due passi	↓ due passi
$t = 0{,}5, \quad x = 1{,}0625, \quad v = 0{,}5$	$t = 0{,}5, \quad x = 1{,}0625, \quad v = 0{,}5$
il programma prosegue	salvataggio e ricaricamento dello stato
↓ altri due passi	↓ altri due passi
$t = 1: \quad x = 1{,}375, \quad v = 1$	$t = 1: \quad x = 1{,}375, \quad v = 1$

Valori in SI. In entrambe le esecuzioni: Eulero esplicito, $a = 1$, $\Delta t = 0{,}25$; identiche regole e condizioni numeriche.

Esempio deterministico a passo fisso, derivato dai dati di "Integrazione numerica della dinamica".

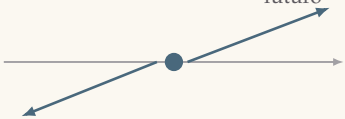
Determinismo e limiti pratici della previsione

L'idea di Laplace considera una conoscenza esatta dello stato e una capacità di calcolo senza limiti. Il nostro programma usa numeri finiti e dati misurati con incertezza. La domanda operativa riguarda quindi l'intervallo temporale su cui la previsione raggiunge la precisione richiesta.

Descrizione ideale

stato assegnato esattamente

futuro



passato

Previsione con risorse finite

precisione e durata da dichiarare

cifre conservate
tempo e memoria disponibili

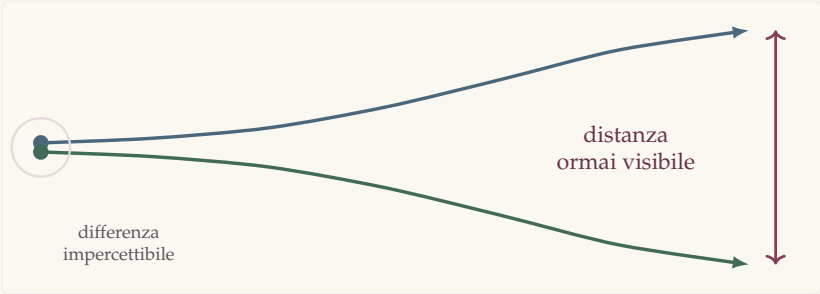
la previsione è riferita a un intervallo e a un errore accettabile

Confronto concettuale. Il modello dinamico e l'accuratezza accessibile al calcolo sono specifiche distinte.

Halliday–Resnick–Walker, *Fundamentals of Physics*, capp. 2 e 5. Esempi del modello.

La sensibilità ai dati iniziali

Eseguiamo due simulazioni con dati iniziali quasi identici. La piccola differenza può crescere e produrre traiettorie nettamente separate. Nei sistemi caotici, la sensibilità ai dati iniziali può limitare la previsione di lungo periodo. La figura permette di seguire la separazione delle previsioni.



Precisione numerica e orizzonte predittivo

Una piccola differenza iniziale può crescere durante l'evoluzione. Fissiamo una soglia di errore oltre la quale la previsione perde l'accuratezza richiesta. Dati più precisi possono prolungare l'orizzonte utile; il confronto fra passi e precisioni numeriche serve anche a riconoscere gli errori del calcolo.

Crescita di una piccola differenza



Un orizzonte da dichiarare

stessa dinamica; diversa incertezza iniziale

Dati più precisi

↓

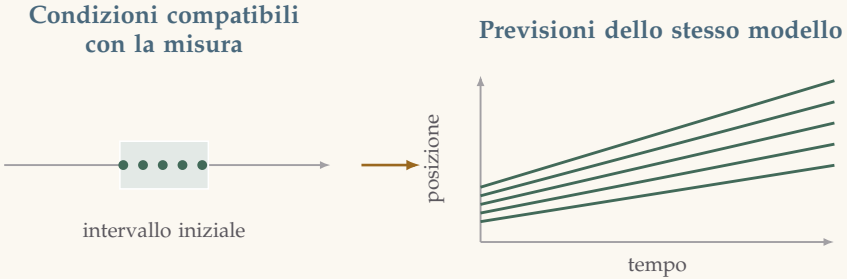
la soglia può essere raggiunta più tardi

Curva illustrativa di amplificazione della differenza.
L'andamento effettivo dipende dalla dinamica studiata.

Halliday–Resnick–Walker, *Fundamentals of Physics*, capp. 2 e 5. Esempi del modello.

Quando la preparazione ammette più traiettorie

La misura iniziale individua un intervallo di valori compatibili. Ripetiamo il calcolo a partire da alcune di queste condizioni, mantenendo la stessa legge del moto. Il confronto fra le traiettorie mostra quali differenze nella previsione possono dipendere dall'incertezza della preparazione.



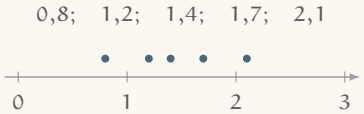
Punti e linee dello stesso colore sono condizioni iniziali e relative evoluzioni. Schema di moto uniforme.

Halliday–Resnick–Walker, *Fundamentals of Physics*, capp. 2 e 5. Esempi del modello.

Propagazione dell'incertezza iniziale

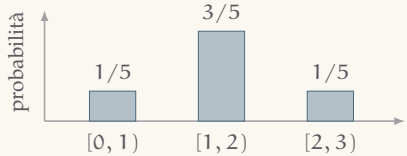
Ogni stato iniziale evolve secondo la stessa legge e conserva il proprio peso. Per ottenere una distribuzione finale, raggruppiamo le posizioni previste in intervalli. Nell'esempio, cinque preparazioni equiprobabili danno i valori mostrati: tre ricadono nell'intervallo centrale, che raccoglie probabilità 3/5.

Cinque posizioni allo stesso istante



Ogni punto deriva da una preparazione.
Qui i cinque pesi iniziali sono uguali: $1/5$.

Raggruppare per intervalli



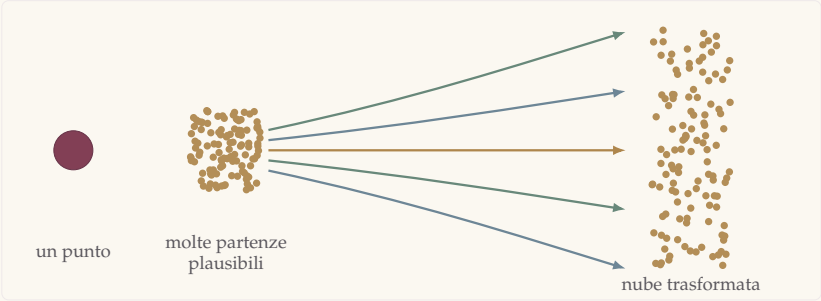
$[a, b)$ comprende a ed esclude b.
Nel gruppo centrale: $3 \cdot (1/5) = 3/5$.

Posizioni in unità convenzionali, a tempo fissato. Con pesi diversi si sommano i pesi degli stati contenuti in ciascun intervallo.

Esempio didattico del modello classico; valori illustrativi, distinti da misure sperimentali.

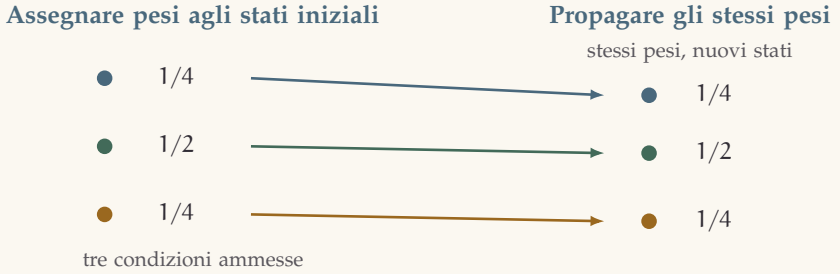
Insieme di condizioni iniziali

Ogni punto della nube rappresenta uno stato iniziale compatibile con le misure. Seguendone l'evoluzione otteniamo un insieme di traiettorie, dal quale stimare la distribuzione dei risultati.



Distribuzione classica degli stati iniziali

La distribuzione assegna un peso a ciascuna condizione compatibile con la preparazione. La dinamica trasporta gli stati, mentre i pesi descrivono l'insieme delle esecuzioni. Per prevedere una misura finale sommiamo i pesi degli stati che producono lo stesso risultato osservabile.

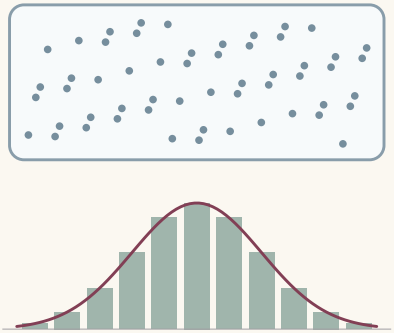


Esempio discreto: i pesi sono $1/4$, $1/2$, $1/4$ e sommano a uno. Nessuna misura reale è riprodotta.

Halliday–Resnick–Walker, *Fundamentals of Physics*, capp. 2 e 5. Esempi del modello.

PARTE II

La simulazione statistica



Le frequenze di un esperimento

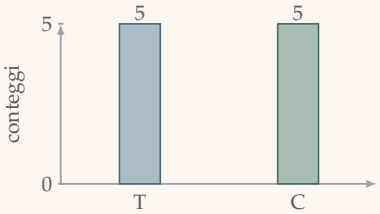
Quando i dati iniziali variano fra le prove, possiamo studiare la frequenza dei risultati. Registriamo ciascun esito e contiamo quante volte compare. Il numero di prove e la procedura di preparazione determinano quale significato attribuire alla distribuzione osservata.

Una preparazione ripetuta

Ⓣ Ⓒ Ⓣ Ⓣ Ⓒ Ⓒ Ⓒ Ⓣ Ⓒ Ⓣ

una riga raccoglie dieci prove

Le frequenze degli esiti



Dieci risultati illustrativi con cinque T e cinque C. Una frequenza osservata è una stima della probabilità.

Halliday–Resnick–Walker, cap. 20. Conteggi esatti del modello binario dichiarato.

Dal moto della moneta al modello probabilistico

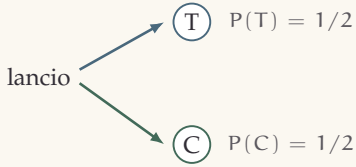
Per ricostruire il moto della moneta servono posizione, rotazione, spinta e interazioni con l'ambiente. Se la domanda riguarda le frequenze delle due facce, possiamo adottare un modello degli esiti. Le probabilità devono rappresentare le condizioni con cui il lancio viene ripetuto.

Seguire il moto della moneta



spinta, rotazione, aria e urti

Descrivere soltanto l'esito



A destra si assume una moneta equilibrata. La scelta delle probabilità è parte del modello della preparazione.

Halliday–Resnick–Walker, cap. 20. Conteggi esatti del modello binario dichiarato.

Ripetere una sequenza di eventi simulati

Un generatore pseudocasuale produce numeri mediante una regola deterministica. Il seme fissa il punto di partenza della sequenza. Riprendendo dallo stesso seme e usando lo stesso algoritmo, il programma ricostruisce gli stessi numeri: questa proprietà permette confronti riproducibili fra simulazioni.

Stessa regola e stesso seme

seme $s_0 = 3$

$s_{k+1} = (5s_k + 1) \bmod 16$

Stessa sequenza simulata

uscite numeriche del generatore

ripartenza →	0	1	6	15	12
ripartenza →	0	1	6	15	12

stesso seme: stessa sequenza

Piccolo generatore didattico a 16 stati; inadatto a simulazioni reali. Sono mostrati cinque valori effettivamente calcolati.

Halliday–Resnick–Walker, cap. 20. Conteggi esatti del modello binario dichiarato.

Il resto determina lo stato successivo

Per un intero $a \geq 0$, la divisione euclidea scrive $a = 16q + r$, con $0 \leq r < 16$. Il simbolo $a \bmod 16$ indica il resto r. Partiamo da $s_0 = 3$:

$$5s_0 + 1 = 5 \cdot 3 + 1 = 16 = 16 \cdot 1 + 0,$$

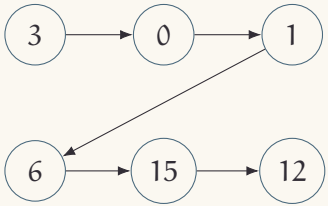
quindi $s_1 = 0$. Poi

$$5s_1 + 1 = 5 \cdot 0 + 1 = 1 = 16 \cdot 0 + 1,$$

quindi $s_2 = 1$. Al terzo passo:

$$5s_2 + 1 = 5 \cdot 1 + 1 = 6 = 16 \cdot 0 + 6,$$

perciò $s_3 = 6$.



Ogni freccia applica $(5s + 1) \bmod 16$.

Il resto appartiene sempre ai sedici stati possibili, da zero a quindici.

Completare i cinque aggiornamenti del generatore

Riprendiamo $s_3 = 6$. Il quarto aggiornamento dà

$$5s_3 + 1 = 5 \cdot 6 + 1 = 31 = 16 \cdot 1 + 15,$$

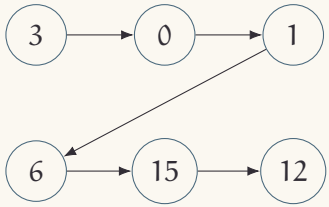
quindi $s_4 = 15$. Il quinto dà

$$5s_4 + 1 = 5 \cdot 15 + 1 = 76 = 16 \cdot 4 + 12,$$

quindi $s_5 = 12$. Le cinque uscite sono pertanto

$$0, \quad 1, \quad 6, \quad 15, \quad 12.$$

Ripartendo dallo stesso seme, ciascun resto determina nuovamente il successivo: la sequenza è riproducibile.



Ogni freccia applica $(5s + 1) \bmod 16$.

Questo piccolo generatore illustra la ricorrenza; sedici stati sono insufficienti per una simulazione reale.

Dalla moneta a un gas

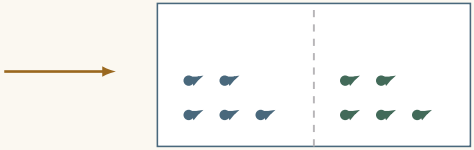
La moneta ci ha permesso di distinguere gli esiti dalle informazioni richieste per seguirne il moto. In un gas compaiono molti elementi. La nuova domanda riguarda quali grandezze collettive possano essere previste senza ricostruire nei dettagli ogni traiettoria.

Una sola variabile osservata



esito di un lancio

Molti elementi da descrivere



posizioni, velocità e interazioni

Le frecce sulle particelle rappresentano velocità; il contenitore e il numero di elementi sono schematici.

Halliday–Resnick–Walker, cap. 20. Conteggi esatti del modello binario dichiarato.

Costo della descrizione molecolare

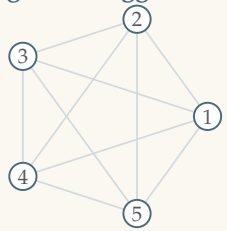
Per ciascuna particella conserviamo posizione e velocità con una precisione scelta. Aumentando il numero degli elementi cresce la quantità di dati; il costo del passo numerico dipende anche dalle interazioni da calcolare. Una descrizione collettiva diventa utile quando la domanda riguarda grandezze aggregate.

Dati del sistema a precisione fissata

1	$x_i \quad v_i$
2	$x_i \quad v_i$
3	$x_i \quad v_i$
4	$x_i \quad v_i$
5	$x_i \quad v_i$

una riga per particella

Legami da aggiornare



costo dipendente dalle interazioni

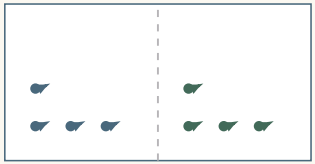
Grafo illustrativo di cinque particelle con tutte le coppie collegate. Altri modelli usano soltanto interazioni locali.

Halliday–Resnick–Walker, cap. 20. Conteggi esatti del modello binario dichiarato.

Livello di descrizione e grandezze osservate

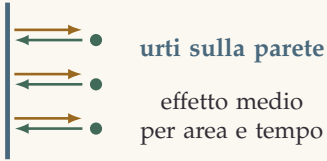
La pressione dipende dall'effetto degli urti delle particelle sulle pareti. Possiamo stimarla seguendo le traiettorie e raccogliendo gli scambi di quantità di moto. La grandezza finale riassume molti eventi; il dettaglio da conservare va scelto in funzione della precisione richiesta.

Dati microscopici



seguire ogni traiettoria

Una grandezza collettiva



pressione: effetto medio degli urti

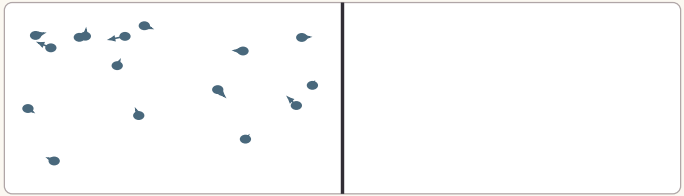
Schema cinetico: frecce incidenti e riflesse. Per ottenere una pressione si media su un'area e un intervallo temporale.

Halliday–Resnick–Walker, cap. 20. Conteggi esatti del modello binario dichiarato.

Preparazione di un gas lontano dall'equilibrio

La paratia confina inizialmente il gas nella metà sinistra. Dopo la rimozione, seguiamo il moto delle particelle e registriamo quante occupano ciascuna metà. Il conteggio descrive l'espansione a una risoluzione scelta.

preparazione iniziale

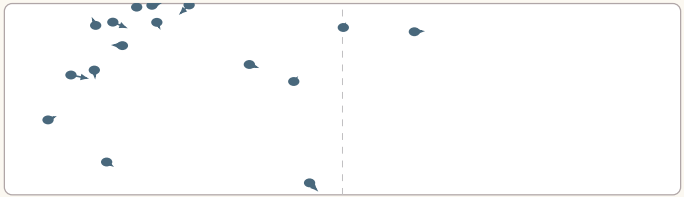


16 particelle indipendenti, riflessioni elastiche alle pareti.
Campioni della stessa evoluzione dopo la rimozione della paratia.

Preparazione di un gas lontano dall'equilibrio

La paratia confina inizialmente il gas nella metà sinistra. Dopo la rimozione, seguiamo il moto delle particelle e registriamo quante occupano ciascuna metà. Il conteggio descrive l'espansione a una risoluzione scelta.

istante intermedio

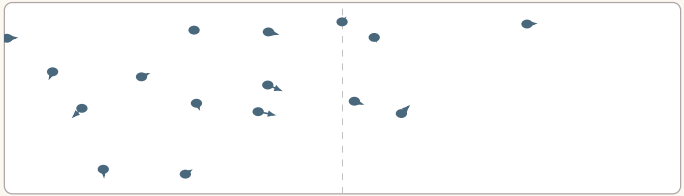


16 particelle indipendenti, riflessioni elastiche alle pareti.
Campioni della stessa evoluzione dopo la rimozione della paratia.

Preparazione di un gas lontano dall'equilibrio

La paratia confina inizialmente il gas nella metà sinistra. Dopo la rimozione, seguiamo il moto delle particelle e registriamo quante occupano ciascuna metà. Il conteggio descrive l'espansione a una risoluzione scelta.

istante successivo



16 particelle indipendenti, riflessioni elastiche alle pareti.
Campioni della stessa evoluzione dopo la rimozione della paratia.

Dinamica reversibile ed espansione del gas

Il gas parte concentrato in una metà del recipiente. Dopo la rimozione della paratia si distribuisce nello spazio disponibile. Nel modello ideale il moto precedente può essere ripercorso invertendo tutte le velocità. Questa preparazione speciale va distinta da un ritorno spontaneo.

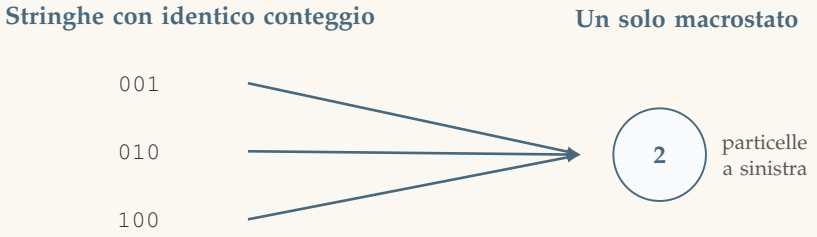


Quadri schematici dell'espansione e del ritorno controllato. Per l'inversione occorrono posizioni e velocità di tutte le particelle.

Halliday–Resnick–Walker, cap. 20. Conteggi esatti del modello binario dichiarato.

Microstato e macrostato in un modello binario

Una stringa specifica il lato occupato da ciascuna particella. Contando gli zeri otteniamo il numero totale a sinistra. Tre stringhe diverse hanno qui lo stesso conteggio: il macrostato conserva una proprietà dell'insieme e lascia indeterminate alcune assegnazioni individuali.

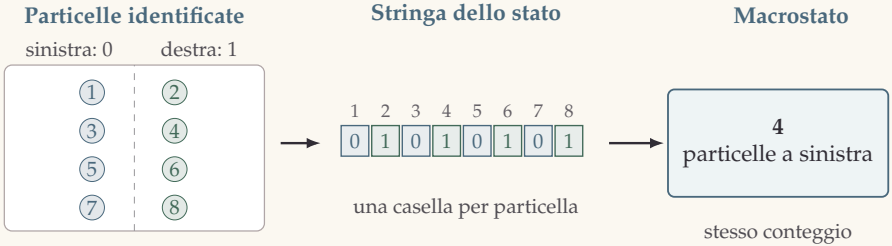


Tre particelle identificate. Il microstato binario è già una descrizione semplificata: posizioni precise e velocità sono escluse.

Halliday–Resnick–Walker, cap. 20. Conteggi esatti del modello binario dichiarato.

Dalle particelle alla stringa binaria

Associamo un identificatore a ciascuna particella. Il bit registra il lato occupato: zero a sinistra, uno a destra. Il conteggio delle caselle con zero determina il macrostato.



Modello binario: posizioni precise e velocità sono escluse.
Tre stringhe differenti producono lo stesso macrostato.

Dalle particelle alla stringa binaria

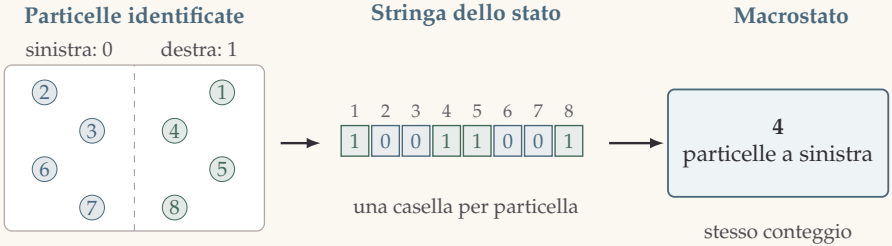
Associamo un identificatore a ciascuna particella. Il bit registra il lato occupato: zero a sinistra, uno a destra. Il conteggio delle caselle con zero determina il macrostato.



Modello binario: posizioni precise e velocità sono escluse.
Tre stringhe differenti producono lo stesso macrostato.

Dalle particelle alla stringa binaria

Associamo un identificatore a ciascuna particella. Il bit registra il lato occupato: zero a sinistra, uno a destra. Il conteggio delle caselle con zero determina il macrostato.



Modello binario: posizioni precise e velocità sono escluse.
Tre stringhe differenti producono lo stesso macrostato.

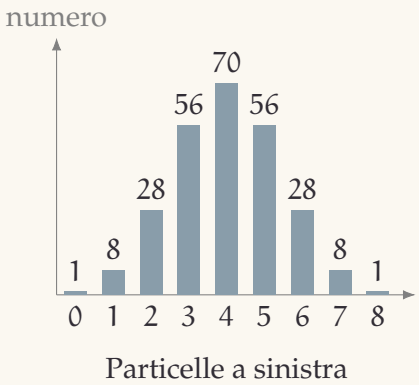
Contare le assegnazioni di otto particelle

Ogni particella può stare a sinistra oppure a destra. Per otto particelle identificate, le assegnazioni sono

$$2^8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256.$$

Con zero particelle a sinistra c'è una sola stringa: tutte a destra. Con una particella a sinistra ci sono otto scelte. Per sceglierne due, le coppie ordinate sono $8 \cdot 7 = 56$. Ogni gruppo compare nei due ordini possibili, quindi

$$n_2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = \frac{56}{2} = 28.$$



Il conteggio riguarda particelle identificate; un gruppo non cambia quando cambia l'ordine con cui lo elenchiamo.

Costruire il conteggio 70

Per tre particelle a sinistra ci sono $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ scelte ordinate. Ogni gruppo compare $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ volte:

$$n_3 = 336/6 = 56.$$

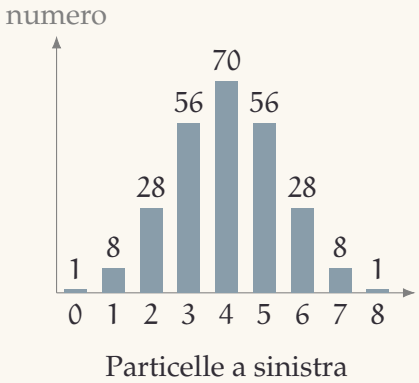
Per quattro particelle:

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 56 \cdot 30 = 1680.$$

I quattro identificatori possono essere ordinati in $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ modi. Pertanto

$$n_4 = \frac{1680}{24} = 70.$$

Ogni gruppo identifica una stringa con quattro zeri.



La divisione elimina i diversi ordinamenti dello stesso gruppo di particelle.

Completare e normalizzare la distribuzione

Scambiare sinistra e destra associa ogni gruppo di k particelle a un gruppo di $8-k$. I conteggi sono quindi

$$(n_0, \dots, n_8) = (1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1).$$

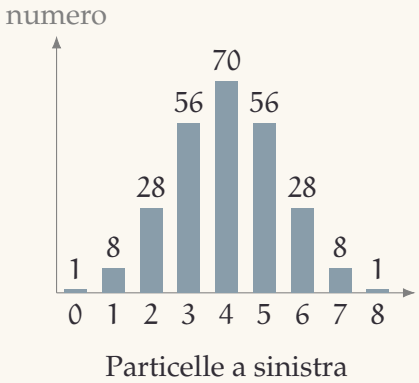
La somma controlla tutte le assegnazioni:

$$1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 256.$$

Se le stringhe sono equiprobabili,

$$P(k = 4) = \frac{70}{256} = \frac{35}{128} = 0{,}2734375.$$

Ogni altra colonna ha probabilità $n_k/256$; la somma dei pesi normalizzati è $256/256 = 1$.



Il macrostato più numeroso raccoglie più assegnazioni individuali.

Assegnazioni equiprobabili e conteggi

Otto particelle possono occupare la metà sinistra o quella destra. Supponiamo equiprobabili le 256 assegnazioni individuali. Lo sono anche i nove conteggi possibili?

Scelta del conteggio

Scegliamo con uguale probabilità un numero da zero a otto, che indica quante particelle sono a sinistra.

Scelta dei lati occupati

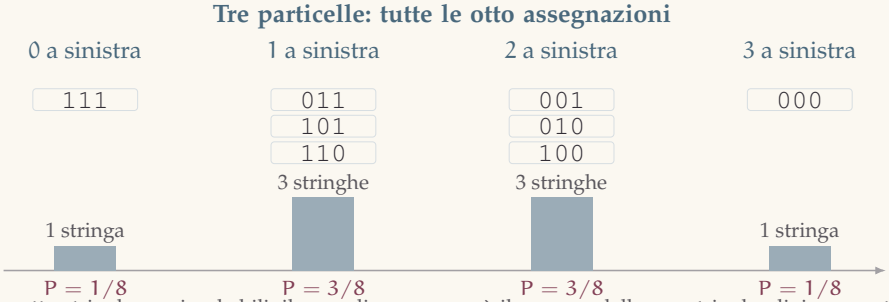
Scegliamo con uguale probabilità una delle 256 assegnazioni dei lati. Contiamo poi le particelle a sinistra.

Quante assegnazioni danno zero particelle a sinistra? Quante ne danno quattro?

Riscontro commentato: confronto fra una e 70 assegnazioni.

Molteplicità dei macrostati

Per tre particelle, ogni stringa assegna ciascuna particella a un lato: zero indica sinistra, uno destra. Raggruppiamo le otto stringhe contando gli zeri. La molteplicità è il numero di stringhe nel gruppo. Con stringhe equiprobabili, il gruppo di tre stringhe ha probabilità 3/8.



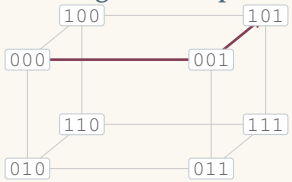
Con otto stringhe equiprobabili, il peso di un gruppo è il numero delle sue stringhe diviso per otto.

Le otto stringhe diventano il grafo di tre particelle; segue il conteggio per otto particelle.

Le configurazioni formano un grafo

Disponiamo le otto stringhe di tre particelle come nodi. Un arco collega configurazioni che differiscono per una cifra. La linea rossa segue 000 → 001 → 101: una particella cambia lato a ogni passo e il numero di zeri scende da tre a due e poi a uno.

Una configurazione per nodo



Tre stati della stessa esecuzione

stringa	particelle a sinistra
000	3
001	2
101	1

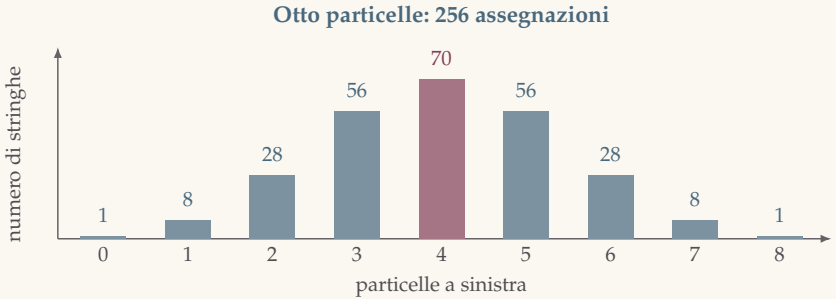
Ogni passaggio cambia una sola cifra. Il conteggio è il numero degli zeri.

0 = sinistra, 1 = destra. Gli archi descrivono aggiornamenti dello stato binario, anziché traiettorie fisiche.

Conteggi esatti del modello binario della presentazione. Halliday–Resnick–Walker, cap. 20.

Distribuzione della molteplicità

Per otto particelle, le nove colonne contano esattamente le stringhe associate alle diverse ripartizioni. Le 70 assegnazioni con quattro particelle per lato costituiscono la colonna più alta.



Conteggio esatto delle stringhe. Halliday–Resnick–Walker, sezione 20.4.

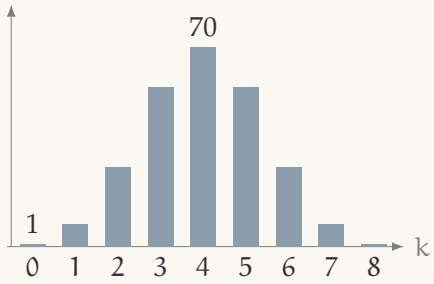
Le ripartizioni equilibrate sono più numerose

Una sola assegnazione colloca tutte le particelle a destra; 70 ne collocano quattro per lato. Con le 256 stringhe equiprobabili:

$$P(k = 0) = \frac{1}{256} \simeq 0{,}003906,$$

$$P(k = 4) = \frac{70}{256} = \frac{35}{128} \simeq 0{,}273438.$$

Il rapporto è $(70/256)/(1/256) = 70$. Il conteggio con quattro particelle per lato raccoglie quindi settanta volte più probabilità di quello con nessuna a sinistra.



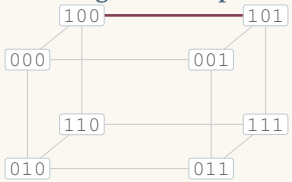
Conteggio delle stringhe su $2^8 = 256$ assegnazioni.

Questa distribuzione descrive il modello binario equiprobabile; per l'evoluzione serve una legge degli scambi. Riferimento: Halliday–Resnick, cap. 19 e §20.4.

Aggiornamento casuale dei conteggi

Scegliamo una particella con probabilità 1/3 e invertiamo il lato assegnato. Nel grafo ogni nodo ha tre aggiornamenti possibili. Il passo illustrato continua l'esecuzione precedente: da 101 si arriva a 100 e il conteggio delle particelle a sinistra passa da uno a due.

Una configurazione per nodo



Un aggiornamento possibile

$$101 \longrightarrow 100$$

1 a sinistra $\longrightarrow$ 2 a sinistra

Si sceglie una delle tre particelle
con probabilità 1/3.
In questo passo cambia il terzo bit.

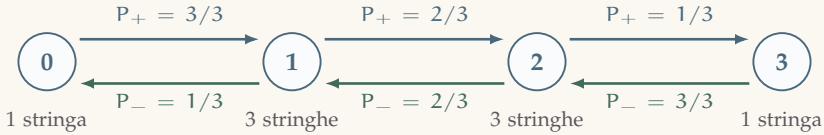
0 = sinistra, 1 = destra. Gli archi descrivono aggiornamenti dello stato binario, anziché traiettorie fisiche.

Regola a scelte equiprobabili del modello con tre particelle.

Dalle stringhe al grafo dei conteggi

Raccogliamo nello stesso nodo le stringhe con uguale numero di particelle a sinistra. Le transizioni hanno pesi diversi: con una particella a sinistra, due scelte aumentano il conteggio e una lo diminuisce. I pesi derivano dal numero di particelle disponibili per ciascuno scambio.

Raggruppare i nodi secondo il numero a sinistra



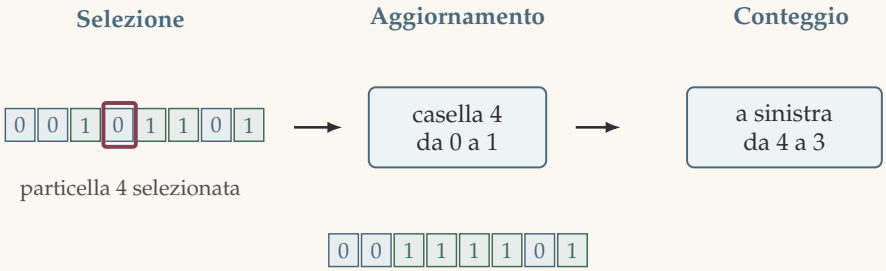
Da 1 a sinistra: due particelle possono entrarvi e una può uscirne.

Modello a tre particelle: da k si passa a k+1 con probabilità (3-k)/3 e a k-1 con probabilità k/3.

Halliday–Resnick–Walker, cap. 20. Conteggi esatti del modello binario dichiarato.

Un passo del modello con scelte casuali

Scegliamo una particella e aggiorniamo il lato occupato. Una sola casella della stringa cambia; il conteggio viene ricalcolato dallo stato aggiornato.



Regola casuale del modello binario: a ogni passo si sceglie una particella e si cambia il lato assegnato.

Equilibrio e configurazioni tipiche

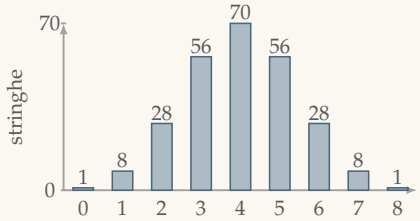
I conteggi vicini alla divisione a metà raccolgono più stringhe. La distribuzione binomiale è stazionaria; invertendo un solo bit a passo, la parità alterna. Da una stringa fissata, la distribuzione dei singoli passi non converge quindi al profilo stazionario.

Quante configurazioni danno lo stesso conteggio?

$$\underbrace{1,\ 8,\ 28,\ 56,\ 70,\ 56,\ 28,\ 8,\ 1}_{256 \text{ stringhe in tutto}}$$

quattro particelle per lato:
70 stringhe compatibili

Distribuzione di equilibrio del modello



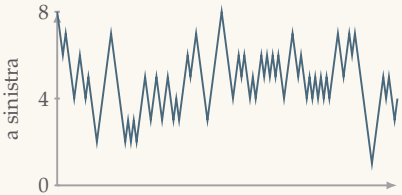
Otto particelle, due metà equivalenti. Il grafico mostra conteggi combinatori, non l'andamento temporale di una singola prova.

Halliday–Resnick–Walker, cap. 20. Conteggi esatti del modello binario dichiarato.

Fluttuazioni e tempi di ritorno

La sequenza degli scambi continua a produrre fluttuazioni anche quando il conteggio resta spesso vicino al centro. Una configurazione estrema rimane accessibile. Aumentando il numero delle particelle, il peso di tutti gli elementi da un lato diminuisce rapidamente e un ritorno spontaneo diventa raro.

Una sequenza di scambi



Anche gli estremi restano accessibili



probabilità di equilibrio: $1/256$

ritorno possibile; attesa variabile fra esecuzioni

A sinistra: 120 scambi simulati di otto particelle. A destra: probabilità di equilibrio dell'estremo, pari a 2^{-8}.

Halliday–Resnick–Walker, cap. 20. Conteggi esatti del modello binario dichiarato.

Combinare le possibilità di due sistemi

Per capire la misura dell'entropia, consideriamo due gruppi indipendenti. Ciascuno ammette tre configurazioni compatibili con il conteggio fissato. A ogni possibilità del primo possiamo associare tre possibilità del secondo: il numero totale si ottiene moltiplicando le due molteplicità. La tabella mostra tutte le associazioni.

Due gruppi indipendenti

Tre particelle in ciascun gruppo. In ciascuno, una particella è a sinistra.

Gruppo 1: `011`, `101`, `110`

Gruppo 2: `011`, `101`, `110`

Ogni stringa del primo gruppo si può associare a tutte e tre le stringhe del secondo.

Le nove associazioni

	`011`	`101`	`110`
`011`	`011|011`	`011|101`	`011|110`
`101`	`101|011`	`101|101`	`101|110`
`110`	`110|011`	`110|101`	`110|110`

$$W_{12} = W_1 W_2 = 3 \cdot 3 = 9$$

0 indica sinistra, 1 destra. Ogni casella è una configurazione dei due gruppi considerati insieme.

Feynman, *Lectures on Physics*, I, §46–5. Modello binario dichiarato.

Il logaritmo trasforma i prodotti in somme

Il logaritmo naturale di un numero positivo è l'esponente a cui elevare e per ottenere quel numero. La sua proprietà utile qui è trasformare un prodotto in una somma. Una grandezza proporzionale a $\ln W$ si somma quindi quando uniamo due sistemi indipendenti con molteplicità W_1 e W_2.

Il logaritmo naturale

$$\ln W = s \iff e^s = W$$

$$e \simeq 2{,}718$$

$W = 1$	$\ln W = 0$
$W = 3$	$\ln W \simeq 1{,}099$
$W = 9$	$\ln W \simeq 2{,}197$
$W = 70$	$\ln W \simeq 4{,}248$

A una molteplicità maggiore corrisponde un logaritmo maggiore. Valori arrotondati.

Dai prodotti alle somme

$$\ln(W_1 W_2) = \ln W_1 + \ln W_2$$



$$\ln 9 = \ln 3 + \ln 3 \simeq 2{,}197$$

Per due gruppi indipendenti, i conteggi si moltiplicano e i loro logaritmi si sommano.

La lunghezza dei due segmenti rappresenta lo stesso valore $\ln 3$. La proprietà è matematica.

Feynman, *Lectures on Physics*, I, cap. 22.

Derivare la proprietà additiva del logaritmo

Siano $W_1, W_2 > 0$. Definiamo $a = \ln W_1$ e $b = \ln W_2$, cioè $e^a = W_1$ ed $e^b = W_2$. La proprietà degli esponenziali dà

$$e^{a+b} = e^a e^b = W_1 W_2.$$

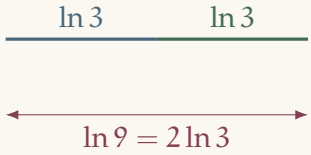
Per definizione dell'inversa,

$$\ln(W_1 W_2) = a + b = \ln W_1 + \ln W_2.$$

Per $W_1 = W_2 = 3$, il prodotto è 9 e

$$\ln 9 = 2 \ln 3 \simeq 2 \cdot 1{,}098612 = 2{,}197224.$$

Una grandezza proporzionale a questo logaritmo si somma quando le molteplicità indipendenti si moltiplicano.



Stessa scala per i logaritmi.

La proprietà richiede molteplicità positive; la loro indipendenza giustifica il prodotto $W_1 W_2$.

Entropia ed equilibrio

Indichiamo con W il numero di configurazioni compatibili con un macrostato e associamo a esso l'entropia di Boltzmann $S_B = k_B \ln W$. Nel nostro modello contiamo soltanto le assegnazioni sinistra/destra. Le ripartizioni più numerose hanno entropia maggiore; la legge degli scambi stabilisce quali vengono visitate nel tempo.

Otto particelle: conta solo il lato occupato

Tutte a sinistra



$W = 1$

$S_B/k_B = \ln W = 0$

Quattro per lato



$W = 70$

$S_B/k_B = \ln W \simeq 4{,}248$

$$S_B = k_B \ln W$$

k_B: costante di Boltzmann; assegna all'entropia l'unità J/K.

È il contributo combinatorio del modello binario. La descrizione termodinamica completa del gas richiede ulteriori dati.

Feynman, *Lectures on Physics*, I, §46–5. Modello binario dichiarato.

Inversione delle velocità nel modello ideale

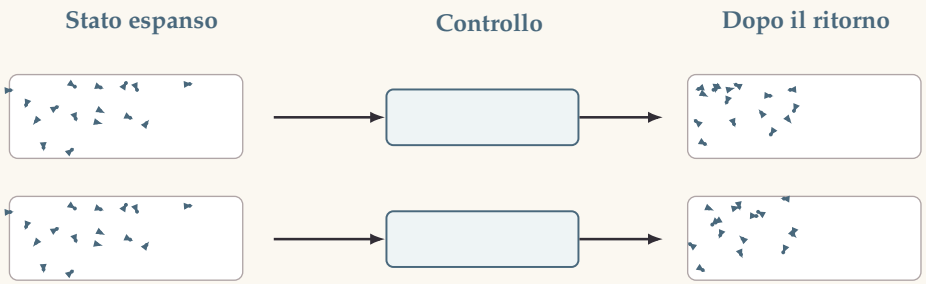
Dopo l'espansione invertiamo simultaneamente tutte le velocità e lasciamo proseguire il moto. Nel modello ideale il gas ripercorre la traiettoria precedente. Il ritorno numerico richiede un metodo che conservi la reversibilità.



Simulazione di particelle indipendenti con riflessioni elastiche. Frecce = velocità; unità convenzionali.

Precisione dell'inversione delle velocità

Due simulazioni partono dallo stesso stato espanso. La prima inverte esattamente le velocità; la seconda introduce perturbazioni controllate. Il confronto mostra la sensibilità della ricostruzione.



Stesse posizioni di partenza. Nella seconda riga, piccole perturbazioni delle velocità alterano il ritorno.

Le condizioni necessarie al ritorno

Il programma può invertire le velocità di tutte le particelle che sta seguendo. La ricostruzione usa i dati microscopici e la stessa legge del moto. Un archivio di sole grandezze collettive lascia aperte molte configurazioni e non specifica i comandi individuali richiesti dall'inversione.

Archivio completo del modello

particella	posizione	velocità
1	x_1	v_1
2	x_2	v_2
3	x_3	v_3

i conteggi delle celle lasciano ignoti molti dati

Comando richiesto per il ritorno



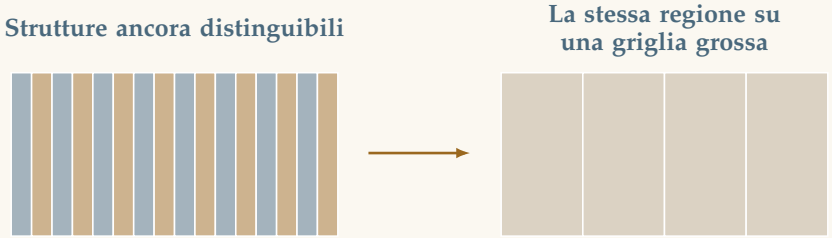
ogni velocità diventa $-v_i$

Modello classico ideale con dinamica reversibile. L'accuratezza del ritorno numerico va verificata separatamente.

Halliday–Resnick–Walker, cap. 20. Conteggi esatti del modello binario dichiarato.

Mescolamento e risoluzione finita

Una distribuzione può sviluppare strutture più fini della griglia usata per osservarla. La media all'interno di una cella riunisce regioni diverse nello stesso valore. Confrontando risoluzioni differenti riconosciamo quali dettagli della distribuzione restano accessibili.

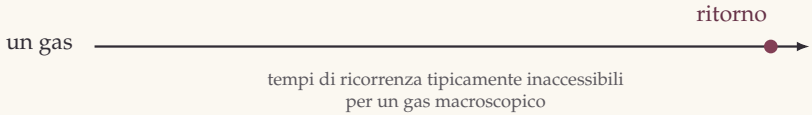


Schema di media spaziale: ogni cella a destra contiene la stessa frazione delle due componenti colorate.

Halliday–Resnick–Walker, cap. 20. Conteggi esatti del modello binario dichiarato.

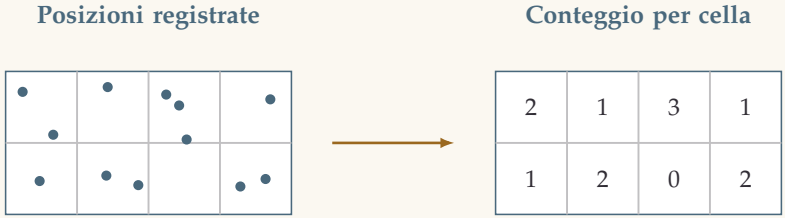
Ritorno spontaneo e durata della simulazione

Il disegno colloca un eventuale ritorno spontaneo su una scala di tempi molto lunga. Per un gas macroscopico, una ricomposizione spontanea è estremamente rara. La simulazione segue un intervallo limitato. Il ritorno preparato invertendo le velocità costituisce una prova diversa.



Descrivere il gas con una griglia

Dividiamo il recipiente in celle e contiamo le particelle che occupano ciascuna regione. I conteggi descrivono la distribuzione a una risoluzione scelta. Per aggiornarli direttamente nel tempo occorre specificare anche una legge degli scambi fra celle.



dodici particelle; la somma delle celle rimane dodici

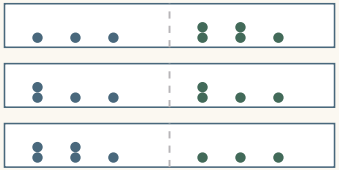
Stesse posizioni e stessa griglia nelle due viste. Ogni numero è calcolato dai punti del riquadro a sinistra.

Halliday–Resnick–Walker, cap. 20. Conteggi esatti del modello binario dichiarato.

Microstato, insieme e distribuzione

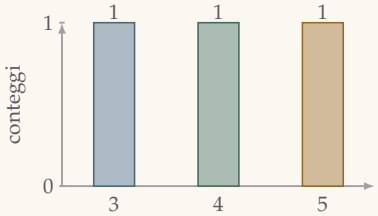
Una singola esecuzione segue una configurazione definita. Ripetendo il calcolo per preparazioni diverse otteniamo un insieme di risultati. La distribuzione riassume questo insieme, assegnando pesi alle condizioni compatibili con le informazioni disponibili.

Un insieme di esecuzioni



condizioni iniziali diverse, stessa legge

La distribuzione dei risultati



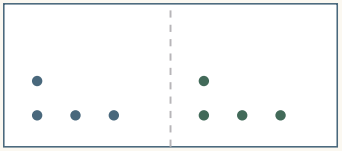
Tre esecuzioni illustrative producono conteggi 3, 4 e 5. Per una stima accurata occorrono molti campioni.

Halliday–Resnick–Walker, cap. 20. Conteggi esatti del modello binario dichiarato.

Valori definiti e incertezza classica

Nel modello classico ogni esecuzione assegna valori definiti alle variabili delle particelle. Le misure possono lasciare sconosciuti molti di questi dettagli. Una distribuzione rappresenta l'incertezza sulle configurazioni compatibili; il caso delle onde richiederà ora un diverso modo di combinare i contributi.

Una configurazione assegnata



nel modello ciascuna particella occupa un lato

L'informazione disponibile

molte stringhe compatibili

4

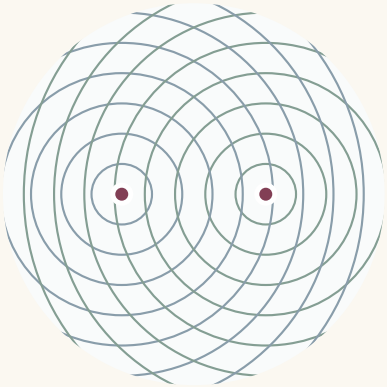
particelle a sinistra

Il conteggio 4 è una descrizione parziale della configurazione illustrata. Il modello classico resta il riferimento di questo confronto.

Halliday–Resnick–Walker, cap. 20. Conteggi esatti del modello binario dichiarato.

PARTE III

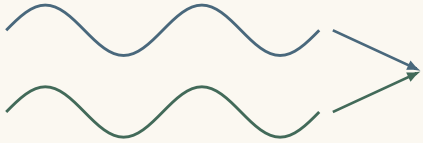
Onde e interferenza



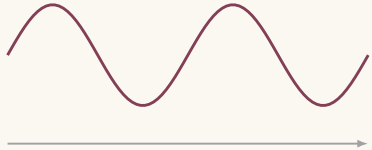
Due onde nella stessa regione

Dopo le particelle e i conteggi, consideriamo due onde che si incontrano. Nel regime delle piccole oscillazioni, le perturbazioni si combinano nello stesso punto. Seguiamo i due contributi per determinare quali dati consentano di prevedere il risultato.

Due contributi che si incontrano



L'oscillazione nella regione comune



stesso punto; evoluzione nel tempo

Frecce fra riquadri: combinazione dei contributi. Le curve rappresentano perturbazioni nel regime lineare.

Halliday–Resnick–Walker, capp. 16–17 e 35. Modelli ondulatori ideali.

Il significato del campo elettrico

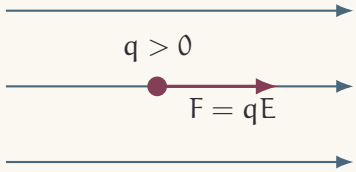
Una carica di prova q posta in un punto subisce una forza elettrica F. Il campo descrive la forza per unità di carica:

$$E = \frac{F}{q}, \qquad F = qE.$$

In una direzione fissata, scegliamo $q = 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$ e $F = 6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}$:

$$E = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-6}} = 3 \cdot 10^{3}\,\mathrm{N/C}.$$

La freccia del campo indica la direzione della forza su una carica positiva; per una carica negativa la forza ha verso opposto.



Campo uniforme nello schema

La freccia assegna una grandezza a un punto dello spazio. Fonte: Halliday, §22.1.

Il campo oscillante della luce

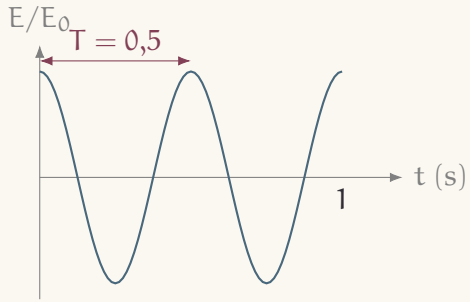
Nel modello di un'onda luminosa piana, il campo elettrico oscilla in direzione trasversale alla propagazione. A un punto fissato possiamo scrivere

$$E(t) = E_0 \cos(2\pi f t + \varphi).$$

E_0 è l'ampiezza, f il numero di cicli al secondo e φ la fase iniziale. Il periodo vale $T = 1/f$. Per $f = 2\,\mathrm{Hz}$, il grafico illustrativo ha

$$T = 1/2 = 0{,}5\,\mathrm{s}.$$

Questa frequenza serve a leggere il disegno; la luce visibile oscilla a frequenze molto maggiori.

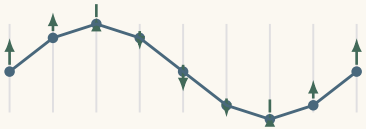


Il grafico usa $\varphi = 0$; varia il campo nel tempo e l'asse verticale rappresenta E/E_0.

Lo stato di un'onda

Per un'onda meccanica, lo spostamento della superficie è descritto in molti punti. Una sola fotografia lascia ignota la velocità locale di variazione. Il modello conserva entrambe le informazioni e usa la legge di propagazione, insieme alle condizioni ai bordi, per aggiornare la griglia.

Valori distribuiti su una griglia



punto blu: spostamento;
freccia verde: variazione locale

Dati locali del modello meccanico

punto	spostamento	velocità
1	u_1	v_1
2	u_2	v_2
3	u_3	v_3

la legge di propagazione
collega i punti vicini

Griglia spaziale illustrativa. Le frecce verdi descrivono il moto locale della superficie, non la direzione di propagazione.

Halliday–Resnick–Walker, capp. 16–17 e 35. Modelli ondulatori ideali.

Un punto dell'onda, due dati iniziali

Una stessa altezza può essere attraversata mentre la superficie sale oppure scende. Queste condizioni danno variazioni diverse nell'istante successivo. Come per la pallina, lo stato del modello meccanico deve comprendere la posizione rispetto all'equilibrio e la velocità con cui essa cambia.

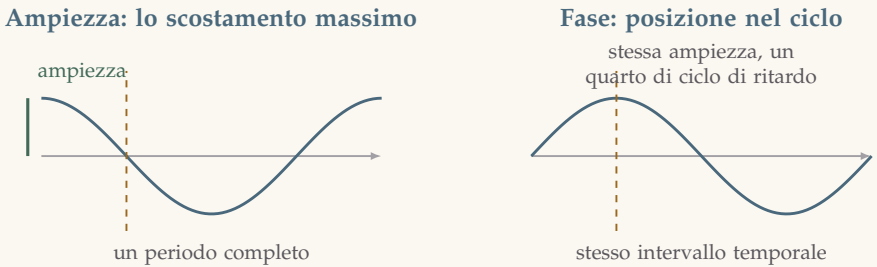


Confronto locale per un intervallo breve. Gli altri punti della griglia e la dinamica completano la previsione dell'onda.

Halliday–Resnick–Walker, capp. 16–17 e 35. Modelli ondulatori ideali.

Ampiezza e fase di un'onda

L'ampiezza A è il massimo scostamento dall'equilibrio. Il periodo T è la durata di un ciclo; la frequenza $f = 1/T$ conta i cicli al secondo. La fase indica il punto del ciclo rispetto a un riferimento. Le curve a destra hanno uguale ampiezza e periodo, con i massimi separati da un quarto di ciclo.



Curve sinusoidali nello stesso punto. Linea tratteggiata: un istante comune di confronto.

Feynman, *Lectures on Physics*, I, cap. 29.

L'intensità misura l'energia trasportata

Un'onda può trasportare energia. Per un fascio che attraversa una superficie perpendicolare alla propagazione, l'intensità media è l'energia che passa per unità di area e di tempo. Un sensore permette di stimarla. Nell'esempio: $I = 2/(1 \cdot 4) = 2/4 = 0{,}5\,\mathrm{W/m^2}$.

Una misura su una superficie



energia trasportata dal fascio

Il sensore raccoglie l'energia ΔE durante un intervallo Δt.

Energia, tempo e area

$$I = \frac{\Delta E}{\mathcal{A}\,\Delta t}$$

$$[I] = \mathrm{J/(m^2 s)} = \mathrm{W/m^2}$$

$$\Delta E = 2\,\mathrm{J}, \quad \mathcal{A} = 1\,\mathrm{m^2}$$
$$\Delta t = 4\,\mathrm{s} \quad \Rightarrow \quad I = 0{,}5\,\mathrm{W/m^2}$$

Stessa area e stessa durata: il doppio dell'energia dà il doppio dell'intensità.

Fascio uniforme, incidenza perpendicolare e raccolta ideale. Esempio numerico illustrativo.

Definizione di intensità media. Feynman, *Lectures on Physics*, I, cap. 29.

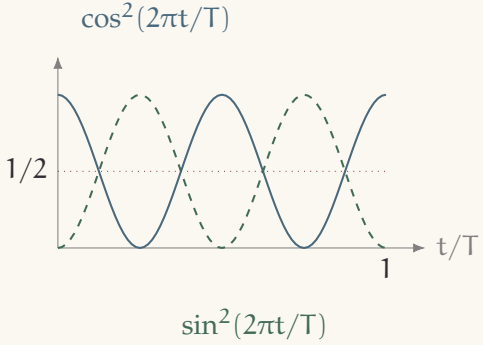
Ricavare la media del quadrato su un periodo

Scriviamo $\langle f \rangle_T$ per la media di una funzione su un periodo intero. Una traslazione di T/4 scambia il profilo di $\cos^2(2\pi t/T)$ con quello di $\sin^2(2\pi t/T)$, conservandone la media. L'identità puntuale $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ implica

$$\langle \cos^2 \rangle_T + \langle \sin^2 \rangle_T = 1.$$

Le due medie sono uguali: ciascuna vale 1/2. Per $u(t) = A\cos(2\pi t/T)$:

$$\langle u^2 \rangle_T = A^2 \langle \cos^2 \rangle_T = \frac{A^2}{2}.$$

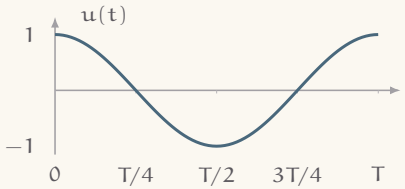


La media riguarda l'intero periodo. L'integrazione continua sarà formalizzata nel secondo modulo.

Dall'oscillazione alla media del quadrato

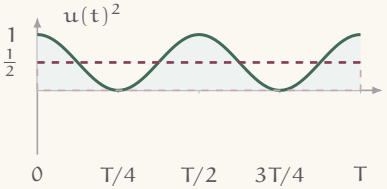
Per onde armoniche progressive, a mezzo e frequenza fissati, l'intensità è proporzionale alla media temporale del quadrato della grandezza oscillante. I valori positivi e negativi danno entrambi un quadrato positivo. Per una sinusoide di ampiezza A, la media su un ciclo vale $A^2/2$: raddoppiare A quadruplica l'intensità.

Una sinusoide in un punto



$u(t) = \cos(2\pi t/T)$; media di u: zero.

Il quadrato e la sua media



Area verde = area del rettangolo alto $1/2$ e largo un periodo.

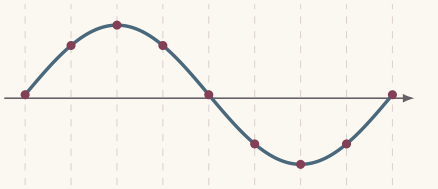
$\langle u^2 \rangle$ indica la media temporale del quadrato. Per ampiezza A: $\langle u^2 \rangle = A^2/2$.

Per la luce: una componente del campo elettrico. Feynman, *Lectures on Physics*, I, cap. 29.

Discretizzazione spaziale del campo

Il profilo dell'onda a un dato istante viene rappresentato da valori su una griglia. Ogni valore corrisponde a una posizione dichiarata; la risoluzione determina quali variazioni spaziali possono essere rappresentate.

Campo continuo



campioni equidistanti

Valori sulla griglia

indice	campo
0	0
1	0,71
2	1
3	0,71
4	0

Esempio numerico, ampiezza massima uguale a 1. La tabella riporta i primi cinque campioni della curva.

Stesse intensità, ritardi diversi

Manteniamo costanti le intensità delle due onde e variamo il ritardo reciproco.
Quali informazioni servono per prevedere l'intensità risultante?

Somma delle intensità

Conserviamo soltanto l'intensità di ciascuna onda e sommiamo i due valori.

Somma delle oscillazioni

Conserviamo ampiezza e fase delle onde. Sommiamo i valori delle perturbazioni e calcoliamo poi l'intensità.

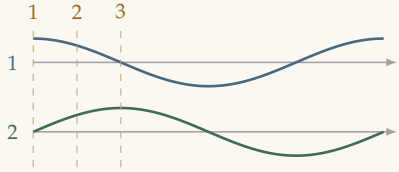
Confrontiamo il caso di creste coincidenti con quello di una cresta e una valle di uguale ampiezza.

Riscontro commentato: somma delle perturbazioni in fase e in opposizione.

La fase come variabile dello stato ondulatorio

Le due oscillazioni hanno uguale ampiezza e sono separate da un quarto di ciclo. Tre cursori selezionano gli stessi istanti sulle due curve. La tabella rende confrontabili i valori: per ricostruire l'oscillazione servono l'ampiezza e la posizione nel ciclo.

Due oscillazioni nello stesso punto



Un periodo completo; tre istanti evidenziati.

Valori simultanei

istante	1	2
0	1	0
T/8	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
T/4	0	1

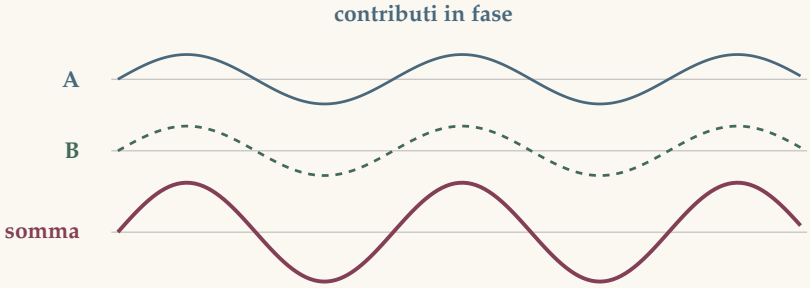
$1/\sqrt{2} \simeq 0{,}71$. Ogni riga legge le due curve alla stessa coordinata temporale.

Tempo in un punto fissato; valori della perturbazione in unità convenzionali.

Modello sinusoidale della presentazione. Halliday–Resnick, capp. 16–17.

Sovrapposizione di due onde

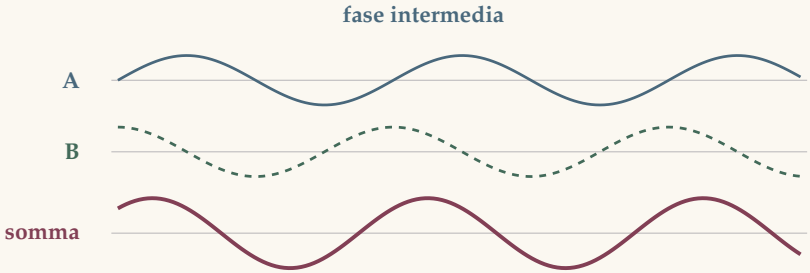
Sovrapponiamo due onde con la stessa ampiezza e frequenza. Il risultato cambia al variare della differenza di fase.



Stessa coordinata orizzontale e stessa scala verticale nelle tre righe. La somma viene calcolata punto per punto.

Sovrapposizione di due onde

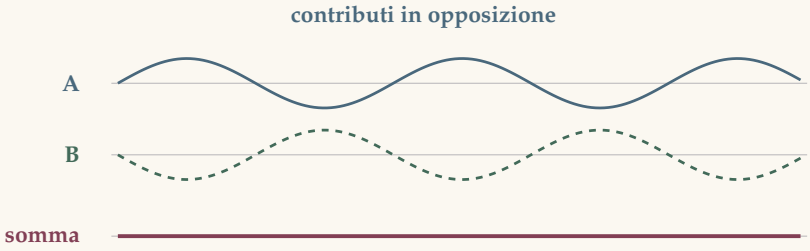
Sovrapponiamo due onde con la stessa ampiezza e frequenza. Il risultato cambia al variare della differenza di fase.



Stessa coordinata orizzontale e stessa scala verticale nelle tre righe. La somma viene calcolata punto per punto.

Sovrapposizione di due onde

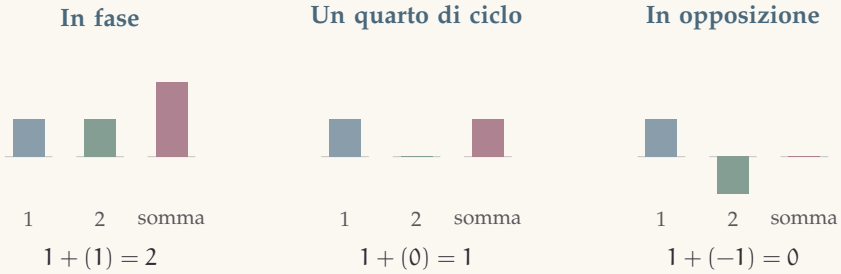
Sovrapponiamo due onde con la stessa ampiezza e frequenza. Il risultato cambia al variare della differenza di fase.



Stessa coordinata orizzontale e stessa scala verticale nelle tre righe. La somma viene calcolata punto per punto.

Interferenza costruttiva e distruttiva

Fissiamo il primo contributo al suo massimo e variamo il ritardo del secondo. Nello stesso punto e istante i valori sono, rispettivamente, $(1, 1)$, $(1, 0)$ e $(1, -1)$. La somma è 2, 1 e 0: contributi concordi si rinforzano e contributi uguali e opposti si compensano.



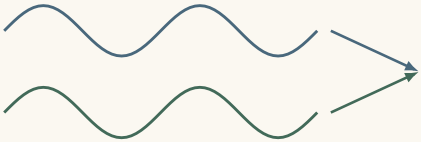
Il primo contributo è al massimo. I tre pannelli confrontano regolazioni diverse del ritardo del secondo.

Somma scalare nel regime lineare, casi già mostrati nella presentazione. Modello sinusoidale illustrativo. Halliday–Resnick, capp. 16–17.

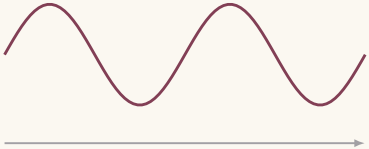
Dal rinforzo alla cancellazione

Conserviamo le ampiezze dei contributi e cambiamo soltanto il loro ritardo relativo. La risultante passa dal rinforzo alla cancellazione. Il confronto mostra perché le intensità separate lasciano aperte previsioni diverse per la regione in cui le onde si sovrappongono.

Due contributi che si incontrano



L'oscillazione nella regione comune



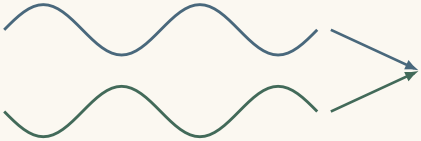
Due contributi di uguale ampiezza e frequenza. La seconda apparizione usa mezzo ciclo di sfasamento.

Halliday–Resnick–Walker, capp. 16–17 e 35. Modelli ondulatori ideali.

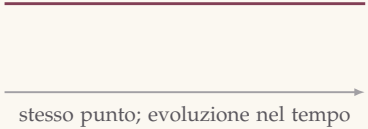
Dal rinforzo alla cancellazione

Conserviamo le ampiezze dei contributi e cambiamo soltanto il loro ritardo relativo. La risultante passa dal rinforzo alla cancellazione. Il confronto mostra perché le intensità separate lasciano aperte previsioni diverse per la regione in cui le onde si sovrappongono.

Due contributi che si incontrano



L'oscillazione nella regione comune



Due contributi di uguale ampiezza e frequenza. La seconda apparizione usa mezzo ciclo di sfasamento.

Halliday–Resnick–Walker, capp. 16–17 e 35. Modelli ondulatori ideali.

Sommare due contributi armonici di uguale ampiezza

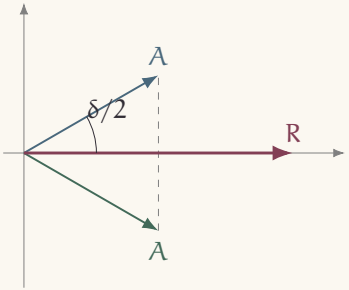
Due onde della stessa frequenza hanno fasori di lunghezza A e differenza di fase δ. Scegliamo l'asse orizzontale lungo la loro bisettrice: gli angoli sono $+\delta/2$ e $-\delta/2$. Le componenti verticali sommano a

$$A\sin(\delta/2) + A\sin(-\delta/2) = 0.$$

Le orizzontali sommano a

$$R = A\cos(\delta/2) + A\cos(-\delta/2) = 2A\cos(\delta/2).$$

Se R è negativo, la risultante ha verso opposto; il suo quadrato resta positivo.



Esempio: $\delta = 60°$.
Le componenti verticali si cancellano.

La scelta della bisettrice cambia il riferimento di fase comune e conserva la differenza fra i due contributi.

Dalla risultante al rapporto delle intensità

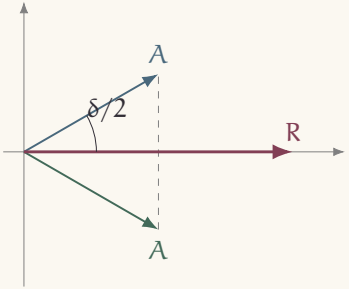
A parità di mezzo e frequenza, l'intensità media è $I = KR^2/2$, dove K è il medesimo fattore positivo. Per contributi in fase $R = 2A$, quindi

$$I_{max} = K(2A)^2/2 = 2KA^2.$$

Usando $R = 2A\cos(\delta/2)$:

$$\frac{I}{I_{max}} = \frac{K\,4A^2\cos^2(\delta/2)/2}{2KA^2} = \cos^2(\delta/2).$$

Il rapporto è indipendente dal fattore K e dall'ampiezza comune A, purché $A > 0$.



Esempio: $\delta = 60°$.
Le componenti verticali si cancellano.

L'intensità è calcolata dopo la somma dei campi. Il rapporto vale per contributi coerenti di uguale ampiezza.

Esempio: tre valori della differenza di fase

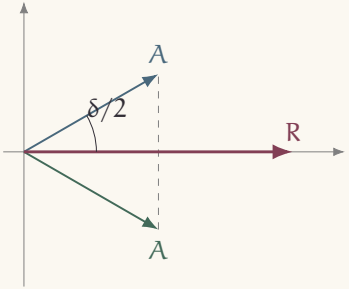
Applichiamo il rapporto appena ricavato:

$$\delta = 0: \quad \cos^2(0/2) = 1^2 = 1;$$

$$\delta = \pi/2: \quad \cos^2(\pi/4) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

$$\delta = \pi: \quad \cos^2(\pi/2) = 0^2 = 0.$$

Per il caso intermedio, le due componenti di una direzione a 45° sono uguali e soddisfano $2c^2 = 1$; essendo positive, $c = 1/\sqrt{2}$.



Esempio: $\delta = 60°$.
Le componenti verticali si cancellano.

La figura mostra un'altra regolazione, $\delta = 60°$; la tabella successiva confronta i tre casi appena calcolati.

Controllo della fase relativa

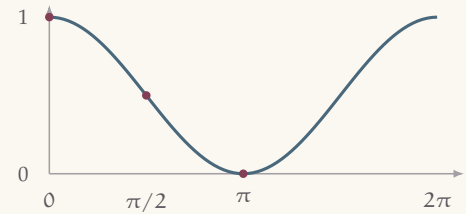
Lo sfasamento δ misura il ritardo nel ciclo: 2π radianti corrispondono a $360°$. Regolando il ritardo, l'intensità media è massima in fase, dimezzata a un quarto di ciclo e nulla in opposizione. La tabella e i tre punti rossi mostrano gli stessi casi, sulla medesima scala.

Tre regolazioni dell'apparato

sfasamento δ	I/I_{max}
0	1
$\pi/2$	$1/2$
π	0

Le ampiezze e la frequenza restano uguali. Ogni riga corrisponde a una nuova regolazione.

La curva unisce i casi



Scala normalizzata al massimo. La curva rappresenta $I/I_{max} = \cos^2(\delta/2)$, nelle condizioni ideali dichiarate.

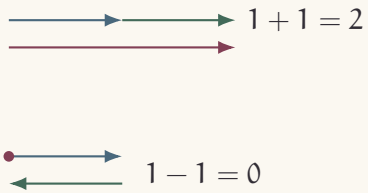
Modello coerente ideale già introdotto. Halliday–Resnick, cap. 35.

La fase determina il risultato della sovrapposizione

La fase indica la posizione nel ciclo; la sua differenza descrive il ritardo reciproco. Due onde di uguale ampiezza A, quando le creste coincidono, danno risultante $A + A = 2A$. In opposizione:

$$A + (-A) = 0.$$

Dopo la media del quadrato, i due casi danno rispettivamente $I = K(2A)^2/2 = 2KA^2$ e $I = 0$. Per $A = 1$, i fasori della figura sommano a 2 oppure a 0.



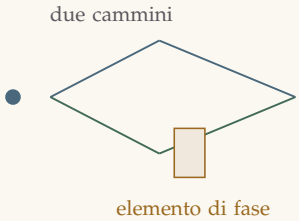
Frecce separate verticalmente per rendere visibili i contributi.

La differenza di fase deve restare stabile durante la prova; variazioni fra ripetizioni possono ridurre il contrasto medio. Riferimenti: Halliday–Resnick, cap. 35; Gerry–Knight, capp. 5–6.

Fase relativa e distribuzione dell'intensità

Una variazione controllata di un cammino modifica la fase relativa dei due contributi. Ripetiamo la misura per diverse regolazioni e confrontiamo l'intensità prevista. Verificare l'intera dipendenza dalla fase è più informativo che riprodurre un solo profilo.

Regolare una differenza di fase



L'intensità cambia con la regolazione

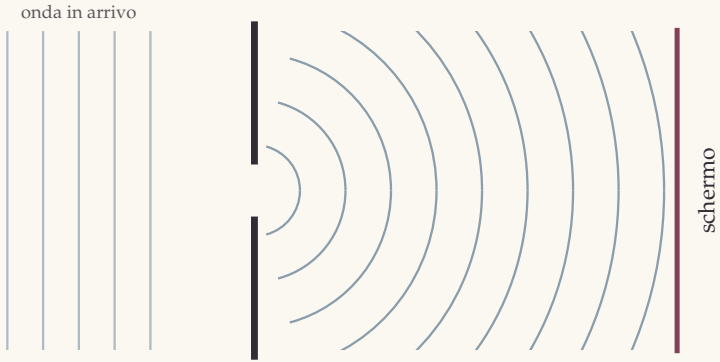


Interferometro ideale bilanciato. Intensità di un'uscita normalizzata al massimo; l'asse orizzontale indica prove differenti.

Halliday–Resnick–Walker, capp. 16–17 e 35. Modelli ondulatori ideali.

Interferenza di Young

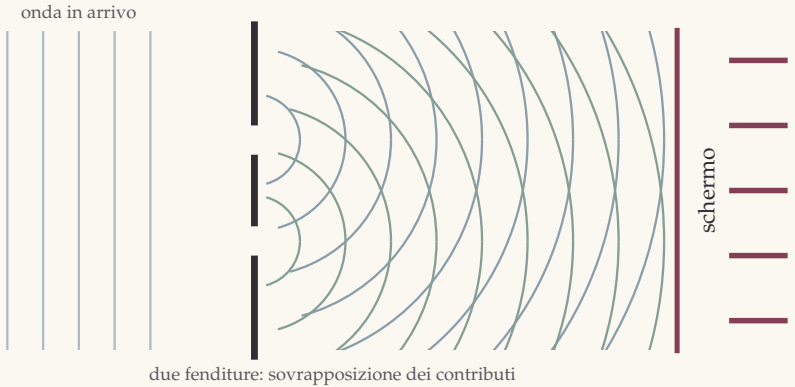
Un'onda d'acqua incontra una barriera. Osserviamo prima la propagazione attraverso una sola apertura, poi attraverso due.



una fenditura: propagazione e diffrazione

Interferenza di Young

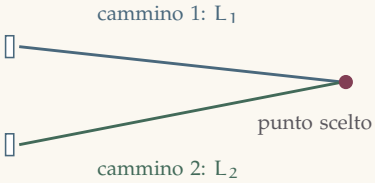
Un'onda d'acqua incontra una barriera. Osserviamo prima la propagazione attraverso una sola apertura, poi attraverso due.



Dalla differenza di cammino alla fase

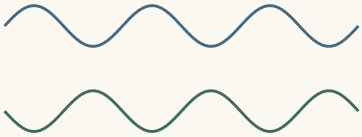
I due contributi possono percorrere distanze differenti prima di raggiungere lo stesso punto. Una lunghezza d'onda corrisponde a un ciclo completo. La differenza di cammino stabilisce quindi lo sfasamento accumulato, al quale si aggiunge l'eventuale fase iniziale delle sorgenti.

Due distanze verso lo stesso punto



Confrontare i cicli accumulati

esempio: $L_2 - L_1 = \lambda/2$



$$\delta = 2\pi(L_2 - L_1)/\lambda$$

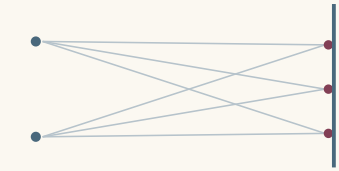
Sorgenti coerenti inizialmente in fase. Lunghezze schematiche; la formula mette in relazione distanza e fase.

Halliday–Resnick–Walker, capp. 16–17 e 35. Modelli ondulatori ideali.

Massimi e minimi della figura di interferenza

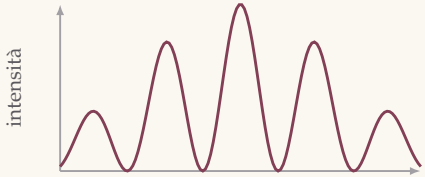
Spostando il punto di osservazione cambiano le distanze percorse e la fase relativa. In alcune regioni i contributi si rafforzano; in altre si compensano. Calcolando la risultante in molti punti otteniamo il profilo dell'intensità sullo schermo.

Cammini verso punti differenti



differenze di cammino nei punti scelti

Profilo di intensità previsto



Profilo teorico illustrativo con inviluppo regolare. La geometria e la lunghezza d'onda fissano la posizione delle frange.

Halliday–Resnick–Walker, capp. 16–17 e 35. Modelli ondulatori ideali.

Dal campo ondulatorio all'intensità

Applichiamo la media del quadrato a una sinusoide di ampiezza due. Leggiamo quattro istanti equidistanti in un periodo, eleviamo al quadrato i valori e ne facciamo la media. Il risultato vale due. Rispetto alla sinusoide di ampiezza uno, l'intensità è quattro volte maggiore, con lo stesso fattore fisico di proporzionalità.

Campionare la stessa oscillazione

$$u(t) = 2\cos(2\pi t/T)$$

t	$u(t)$	$u(t)^2$
0	2	4
$T/4$	0	0
$T/2$	-2	4
$3T/4$	0	0

Media e confronto

$$\langle u^2 \rangle = \frac{4+0+4+0}{4} = 2$$

$$A = 1 : \quad \langle u^2 \rangle = 1/2$$

$$A = 2 : \quad \langle u^2 \rangle = 2$$

$$\frac{I_{A=2}}{I_{A=1}} = \frac{2}{1/2} = 4$$

Questi quattro campioni danno la media esatta per la sinusoide scelta. Per un profilo generico occorre controllare il campionamento.

Valori dell'oscillazione in unità convenzionali. Feynman, *Lectures on Physics*, I, cap. 29.

Il profilo prodotto da una sola apertura

Chiudendo una fenditura eliminiamo la sovrapposizione fra i due cammini. L'apertura rimasta produce comunque una distribuzione allargata per diffrazione. La sua forma dipende dalla larghezza della fenditura e dalle condizioni con cui il campo viene osservato.

Rimane una sola apertura



La diffrazione dell'apertura

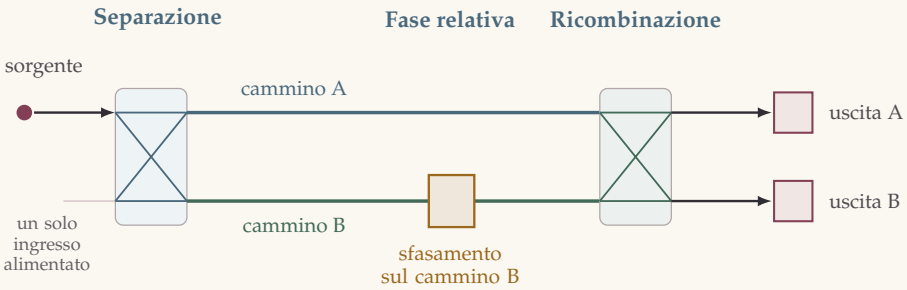


A destra: profilo ideale di diffrazione di una fenditura in campo lontano; sono visibili anche i massimi laterali.

Halliday–Resnick–Walker, capp. 16–17 e 35. Modelli ondulatori ideali.

Interferometro a due cammini

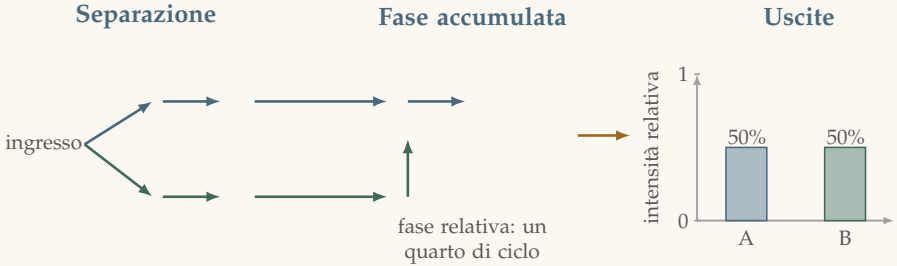
Un primo elemento divide il fascio in due parti uguali, che percorrono cammini diversi. Una lastra modifica la fase lungo uno dei cammini. Quando le due parti si ricombinano, l'intensità alle uscite dipende dalla fase relativa.



Schema ideale: il primo elemento divide il fascio in parti uguali. La fase regola le intensità alle uscite.

Simulazione dell'interferometro

Ogni elemento dell'apparato corrisponde a un aggiornamento delle ampiezze. Il separatore crea due contributi; un cammino ne modifica la fase. Alla ricombinazione calcoliamo le intensità delle uscite. Nel caso bilanciato con un quarto di ciclo di ritardo, le due uscite hanno la stessa intensità.

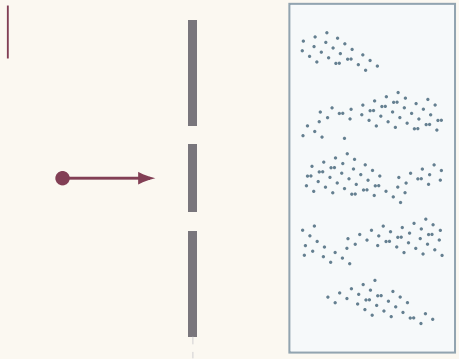


Frecce piccole: ampiezza e fase nei due cammini. Intensità normalizzate al totale, apparato ideale senza perdite.

Halliday–Resnick–Walker, capp. 16–17 e 35. Modelli ondulatori ideali.

PARTE IV

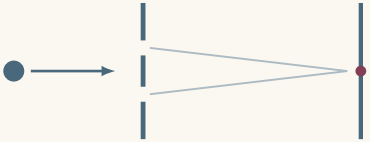
L'interferenza di particelle singole



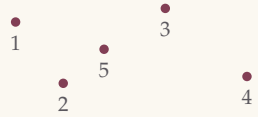
Una particella alla volta

Manteniamo l'apparato a due aperture e riduciamo la presenza simultanea di più particelle. Ogni emissione viene rivelata come un evento localizzato. La nuova simulazione deve descrivere sia il singolo risultato sia la distribuzione delle posizioni ottenuta ripetendo la preparazione.

La stessa geometria



Un risultato per emissione



gli eventi vengono accumulati nello stesso schermo

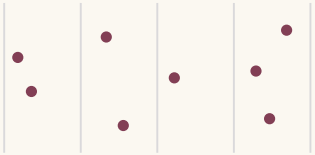
Le linee indicano alternative dell'apparato, senza attribuire una traiettoria osservata a ciascuna particella.

Feynman, *Lectures on Physics*, III, cap. 1. Calcoli illustrativi del modello.

Eventi localizzati e distribuzione statistica

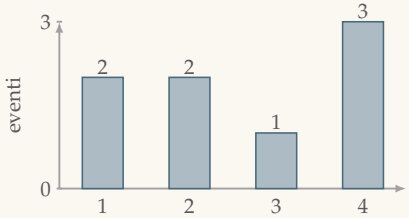
Il rivelatore restituisce una posizione per ogni evento. Dividiamo lo schermo in intervalli e costruiamo un istogramma con gli stessi dati. Il profilo diventa riconoscibile accumulando molte ripetizioni; la precisione della stima dipende dal numero di eventi registrati.

Posizioni registrate



ogni punto appartiene a un intervallo

Stessi eventi raccolti in intervalli

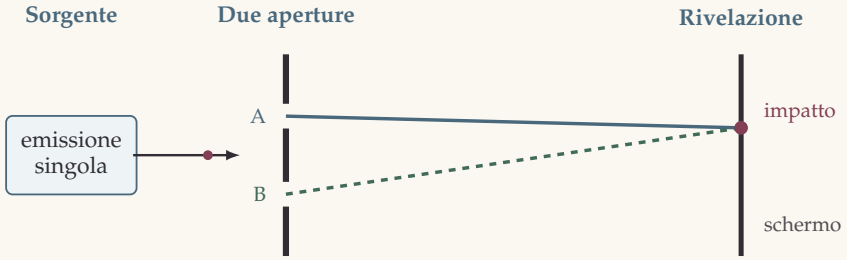


Otto punti illustrativi: conteggi 2, 2, 1 e 3 negli stessi quattro intervalli. Nessun dato sperimentale è riprodotto.

Feynman, *Lectures on Physics*, III, cap. 1. Calcoli illustrativi del modello.

Apparato a due fenditure con emissione singola

La sorgente emette particelle singole verso una barriera con due fenditure. Lo schermo registra la posizione di ciascun impatto.

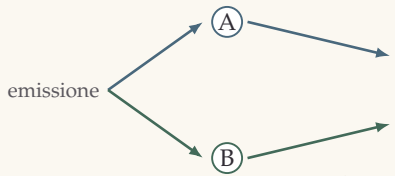


Vista laterale. Le linee individuano due alternative geometriche associate alla stessa regione di rivelazione.

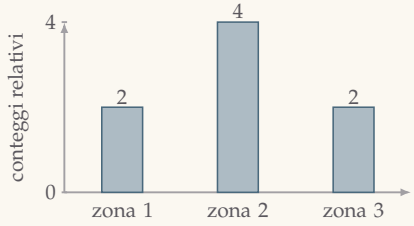
Ipotesi dei cammini indipendenti

Un primo modello sceglie una fenditura e genera un impatto secondo il profilo assegnato a quel cammino. Assume inoltre che l'apertura dell'altra fenditura lasci invariato ciascun contributo. Da queste ipotesi segue la somma dei conteggi, da verificare nelle stesse condizioni di illuminazione.

Scelta di un cammino nel primo modello



Somma dei contributi assegnati

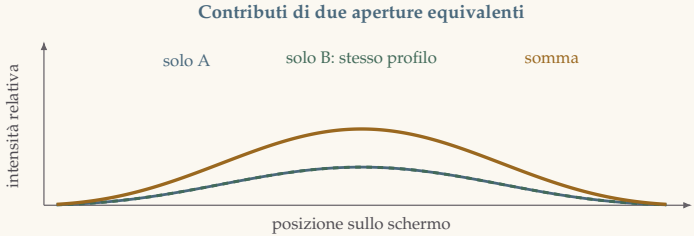


Modello discreto illustrativo: ciascun profilo vale 1, 2, 1; la loro somma vale 2, 4, 2.

Feynman, *Lectures on Physics*, III, cap. 1. Calcoli illustrativi del modello.

Predizione del modello classico dei cammini

Misuriamo la distribuzione degli impatti con ciascuna fenditura aperta separatamente. Il modello dei cammini indipendenti prevede, con entrambe aperte, la somma dei due contributi.



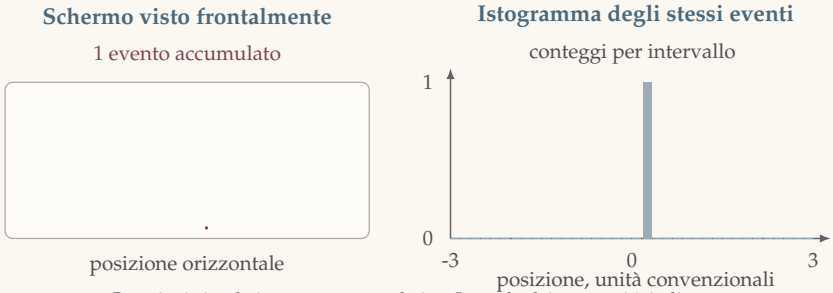
Modello illustrativo di aperture identiche in campo lontano; uguali condizioni di illuminazione.

Osservazione

La previsione esclude minimi prodotti dalla cancellazione fra i due cammini.

Accumulo degli eventi sullo schermo

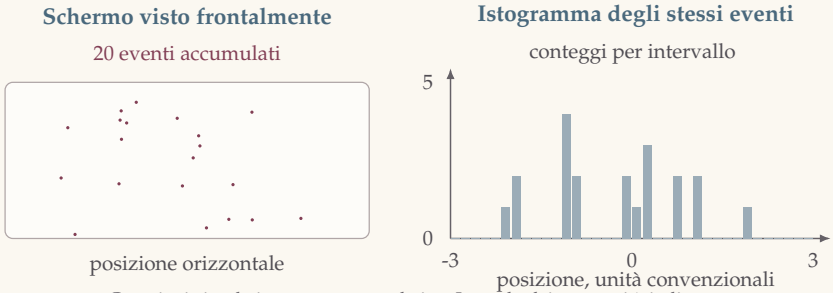
La sequenza mostra impatti campionati dal modello quantistico. Ogni passaggio conserva gli eventi precedenti; l'istogramma è calcolato dagli stessi punti visualizzati sullo schermo.



Campioni simulati, sequenza cumulativa. La scala dei conteggi è indicata sull'asse; la curva rossa dell'ultimo quadro mostra l'attesa del modello.

Accumulo degli eventi sullo schermo

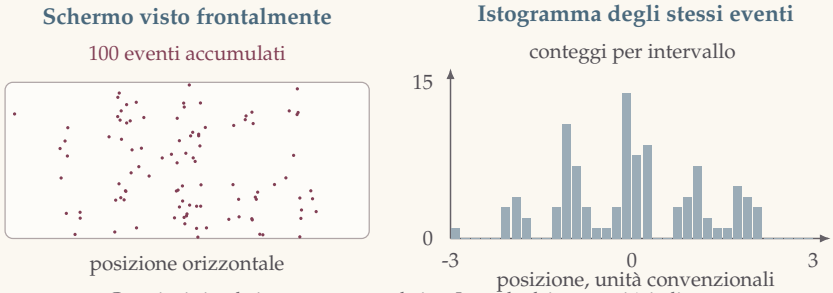
La sequenza mostra impatti campionati dal modello quantistico. Ogni passaggio conserva gli eventi precedenti; l'istogramma è calcolato dagli stessi punti visualizzati sullo schermo.



Campioni simulati, sequenza cumulativa. La scala dei conteggi è indicata sull'asse; la curva rossa dell'ultimo quadro mostra l'attesa del modello.

Accumulo degli eventi sullo schermo

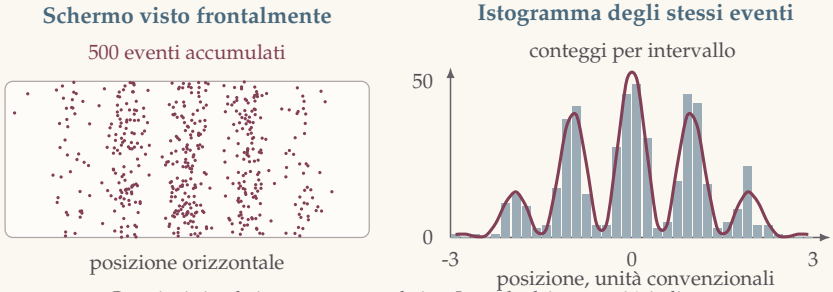
La sequenza mostra impatti campionati dal modello quantistico. Ogni passaggio conserva gli eventi precedenti; l'istogramma è calcolato dagli stessi punti visualizzati sullo schermo.



Campioni simulati, sequenza cumulativa. La scala dei conteggi è indicata sull'asse; la curva rossa dell'ultimo quadro mostra l'attesa del modello.

Accumulo degli eventi sullo schermo

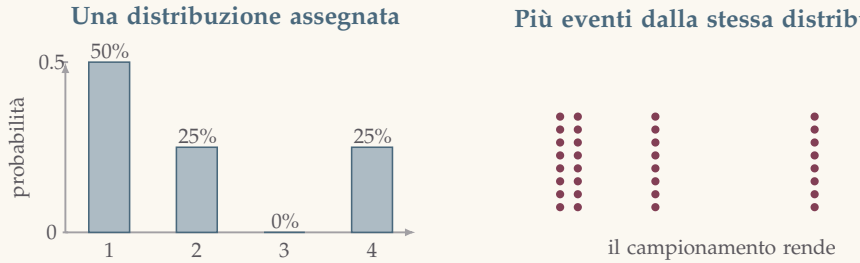
La sequenza mostra impatti campionati dal modello quantistico. Ogni passaggio conserva gli eventi precedenti; l'istogramma è calcolato dagli stessi punti visualizzati sullo schermo.



Campioni simulati, sequenza cumulativa. La scala dei conteggi è indicata sull'asse; la curva rossa dell'ultimo quadro mostra l'attesa del modello.

Dagli eventi alla distribuzione

Le frequenze si stabilizzano attorno alle probabilità del modello quando aumentano le ripetizioni. Generare più eventi riduce le fluttuazioni del campionamento. Un errore sistematico nella distribuzione assegnata richiede invece di riesaminare la rappresentazione e le sue ipotesi.



Esempio discreto: probabilità 1/2, 1/4, 0, 1/4. I punti illustrano 32 eventi con gli stessi pesi; il confronto fisico richiede misure indipendenti.

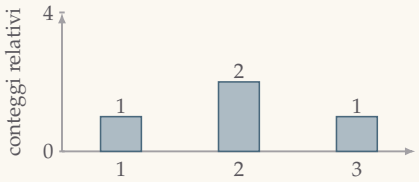
Feynman, *Lectures on Physics*, III, cap. 1. Calcoli illustrativi del modello.

L’apertura della seconda fenditura

Confrontiamo l’apparato con una sola apertura e con entrambe. Il modello iniziale somma i contributi separati. Una descrizione che conserva le fasi permette anche cancellazioni: dobbiamo quindi stabilire quale ipotesi sui cammini sia compatibile con le osservazioni dell’esperimento.

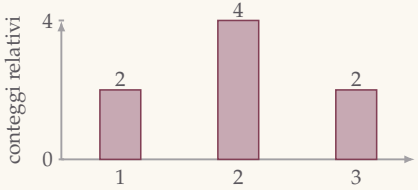
Contributi delle singole aperture

un profilo per apertura: 1, 2, 1



Previsione con entrambe aperte

cammini indipendenti



Confronto fra due previsioni teoriche a uguale scala. Profili discreti illustrativi; il minimo centrale è prodotto da fasi opposte.

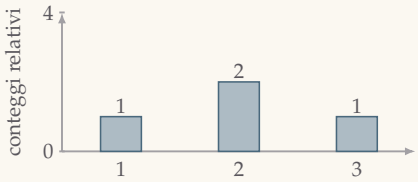
Feynman, *Lectures on Physics*, III, cap. 1. Calcoli illustrativi del modello.

L’apertura della seconda fenditura

Confrontiamo l’apparato con una sola apertura e con entrambe. Il modello iniziale somma i contributi separati. Una descrizione che conserva le fasi permette anche cancellazioni: dobbiamo quindi stabilire quale ipotesi sui cammini sia compatibile con le osservazioni dell’esperimento.

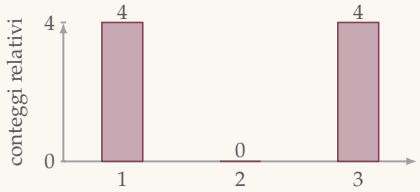
Contributi delle singole aperture

un profilo per apertura: 1, 2, 1



Previsione con entrambe aperte

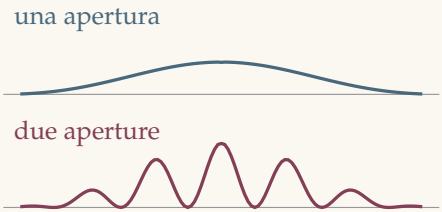
contributi con fase relativa



Confronto fra due previsioni teoriche a uguale scala. Profili discreti illustrativi; il minimo centrale è prodotto da fasi opposte.

Feynman, *Lectures on Physics*, III, cap. 1. Calcoli illustrativi del modello.

Il confronto fra una e due fenditure

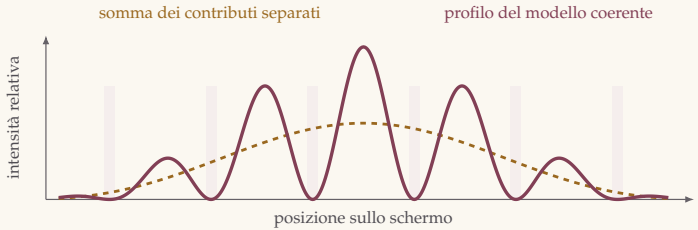


Con una sola fenditura aperta osserviamo la distribuzione propria di quell'apertura, con un allargamento del profilo.

Aprendo anche la seconda compaiono le frange dovute all'interferenza fra i due cammini. Il confronto permette di isolare l'effetto della loro presenza simultanea.

Confronto fra modelli di interferenza

Le curve illustrano le previsioni di due modelli a parità di illuminazione incidente: cammini indipendenti e cammini coerenti. Sono profili teorici; il confronto sperimentale è discusso da Haroche e Raimond, sezione 2.2.



Curve teoriche illustrative, stessi contributi e stesso flusso incidente. Nessun dato sperimentale è riprodotto.

Osservazione

In alcune regioni, a parità di emissione incidente, l'apertura della seconda fenditura riduce il numero di impatti.

Numero di eventi e ipotesi del modello

Il modello che somma i due contributi separati non riproduce i minimi delle frange. Quale intervento può correggere questa differenza?

Più eventi simulati

Generiamo un numero maggiore di impatti, mantenendo gli stessi profili e la stessa regola di somma.

Ipotesi sui cammini da rivedere

Esaminiamo l'ipotesi che ciascun cammino mantenga il proprio profilo quando apriamo anche l'altra fenditura.

Distinguiamo le fluttuazioni dovute a pochi eventi da una differenza che persiste aumentando i conteggi.

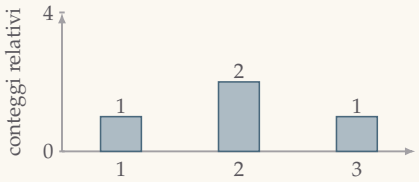
Riscontro commentato: conservare le fasi prima del modulo quadrato.

Test dell'ipotesi dei cammini indipendenti

La somma di due contributi positivi invariati produce un aumento dei conteggi in ogni regione. L'interferenza può invece produrre un minimo dove entrambi i cammini contribuiscono. Il confronto sperimentale verifica l'ipotesi di indipendenza dei profili; la regola di addizione delle probabilità per eventi esclusivi resta valida.

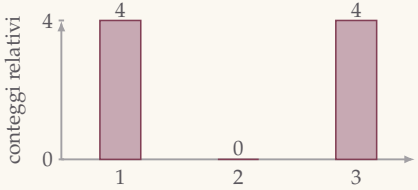
Contributi delle singole aperture

un profilo per apertura: 1, 2, 1



Previsione con entrambe aperte

contributi con fase relativa



Il grafico confronta previsioni, non dati sperimentali. Nella zona centrale due ampiezze di uguale modulo e fase opposta si cancellano.

Feynman, *Lectures on Physics*, III, cap. 1. Calcoli illustrativi del modello.

L’apparato determina la distribuzione

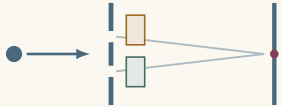
La distribuzione dipende dalle condizioni dell’intero apparato. Possiamo aggiungere un rivelatore capace di registrare la fenditura attraversata. Il modello deve allora includere l’interazione e lo stato del registro, perché la distinguibilità delle alternative modifica il risultato della ricombinazione.

Apparato con alternative coerenti



fase relativa conservata

Aggiungere un registro di cammino



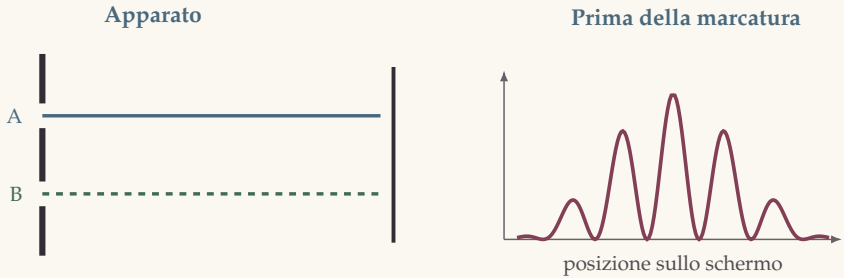
cammino associato a una traccia

I piccoli registri colorati indicano tracce fisiche. La geometria dell’apparato è schematica.

Feynman, *Lectures on Physics*, III, cap. 1. Calcoli illustrativi del modello.

Rivelazione del cammino

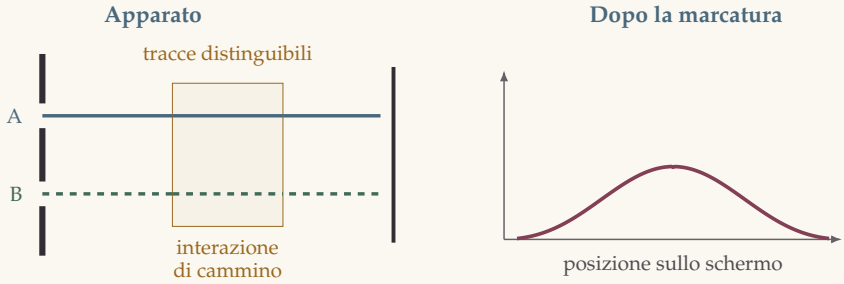
Aggiungiamo un rivelatore capace di distinguere la fenditura attraversata e lasciamo proseguire la particella. La simulazione deve includere l'interazione con questo nuovo elemento dell'apparato.



Modello ideale: stessa geometria e stessa scala. L'interazione registra il cammino lasciando proseguire il sistema.

Rivelazione del cammino

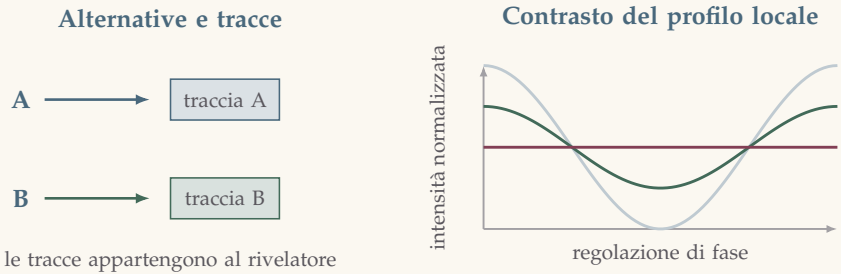
Aggiungiamo un rivelatore capace di distinguere la fenditura attraversata e lasciamo proseguire la particella. La simulazione deve includere l'interazione con questo nuovo elemento dell'apparato.



Modello ideale: stessa geometria e stessa scala. L'interazione registra il cammino lasciando proseguire il sistema.

Distinguibilità del cammino e visibilità

Quando i cammini lasciano tracce distinguibili, il rivelatore conserva una relazione con le alternative. La distribuzione locale perde contrasto. Nel modello ideale la marcatura completa elimina le frange, mentre una distinzione parziale ne riduce la visibilità senza modificare i contributi dei singoli cammini.



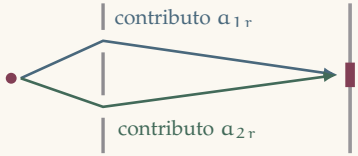
Visibilità: contrasto fra massimi e minimi. I tre profili hanno la stessa scala; la lettura delle tracce è successiva all'interazione.

Feynman, *Lectures on Physics*, III, cap. 1. Calcoli illustrativi del modello.

Dalla probabilità alle ampiezze

I minimi d'interferenza richiedono una descrizione capace di combinare contributi con fase. Adottiamo la regola di Born: la probabilità di un esito è il quadrato del modulo della sua ampiezza normalizzata. È una legge del modello quantistico, sottoposta a verifica sperimentale. Le figure successive spiegano come eseguire il calcolo.

Un esito: impatto nella regione r



I due cammini contribuiscono allo stesso risultato della misura.

La regola del modello quantistico

$$a_r = a_{1r} + a_{2r}$$

Prima si sommano i contributi coerenti.

$$P(r) = |a_r|^2$$

Il quadrato del modulo dà la probabilità, per ampiezze normalizzate. La normalizzazione fissa a uno la somma delle probabilità di tutti gli esiti.

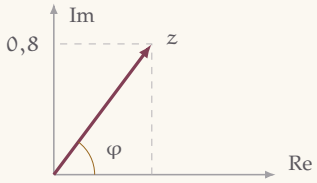
Regola di Born per esiti discreti; alternative coerenti e assenza di una registrazione che distingua il cammino.

Feynman, *Lectures on Physics*, III, §1–7.

Le ampiezze rappresentate con frecce

Per memorizzare la freccia usiamo le coordinate della sua punta, a e b. Le riuniamo nel numero complesso $z = a + ib$, dove $i^2 = -1$. I nomi parte reale e parte immaginaria distinguono i due assi. Lunghezza e angolo della freccia descrivono gli stessi dati come modulo e fase.

La punta ha due coordinate



Stessa scala sui due assi.

La stessa informazione in un numero

$$z = a + ib \qquad i^2 = -1$$

a: parte reale, coordinata orizzontale.
b: parte immaginaria, coordinata verticale.

$$z = 0{,}6 + 0{,}8i$$

$$|z| = \sqrt{0{,}6^2 + 0{,}8^2} = 1$$

Il modulo $|z|$ è la lunghezza della freccia.
Il simbolo i distingue le due coordinate.

Il piano dei numeri complessi è una rappresentazione matematica dell'ampiezza; le coordinate sono dati del programma.

Feynman, *Lectures on Physics*, I, cap. 22.

Una fase si legge dalle coordinate

La freccia di ampiezza unitaria ruota nel piano. Le coordinate della punta sono le lunghezze orientate delle sue proiezioni sui due assi; segno e quadrante fanno parte dei dati che il programma conserva.

Per un angolo φ:

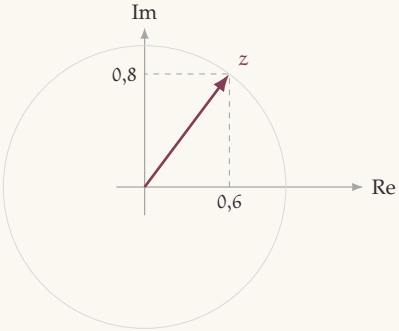
$$a = \cos\varphi, \qquad b = \sin\varphi.$$

Nel primo quadrante entrambi sono positivi.

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

Nel caso disegnato $a = 0{,}6$, $b = 0{,}8$:

$$0{,}36 + 0{,}64 = 1.$$



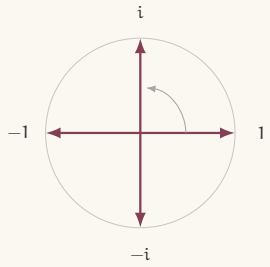
Il cerchio è nel piano di una singola ampiezza complessa. L'angolo misura una fase, non l'orientazione nello spazio del banco.

Quattro posizioni lungo lo stesso ciclo

Le fasi impiegate negli esperimenti corrispondono a posizioni riconoscibili del cerchio. I radianti misurano l'arco su un cerchio unitario; una circonferenza completa ha lunghezza 2π.

fase	coordinate	numero
$0°$	$(1, 0)$	1
$90°$	$(0, 1)$	i
$180°$	$(-1, 0)$	-1
$270°$	$(0, -1)$	$-\mathrm{i}$

Un quarto di giro misura $\pi/2$ radianti; mezzo giro misura π.

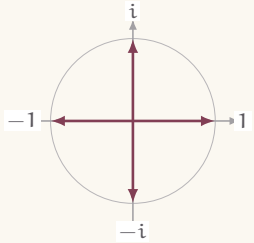


La scrittura esponenziale della pagina successiva riunisce queste coordinate. La sua derivazione matematica appartiene al secondo modulo.

Scrivere la fase con un numero complesso

Una freccia di lunghezza r e angolo φ ha coordinate $r\cos\varphi$ e $r\sin\varphi$. La scrittura $re^{i\varphi}$ riunisce queste due coordinate mediante l'identità di Eulero. Ritroviamo le fasi già usate nelle figure: zero, un quarto, mezzo e tre quarti di ciclo.

Quattro fasi di una freccia unitaria



Una scrittura per lunghezza e fase

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

$r = |z|$ è il modulo; φ è l'angolo in radianti.
$e^{i\varphi}$ rappresenta la freccia di lunghezza uno.

$$e^{i0} = 1 \qquad e^{i\pi/2} = i$$
$$e^{i\pi} = -1 \qquad e^{i3\pi/2} = -i$$

Un giro completo: 2π radianti $= 360°$.
La freccia torna alla stessa orientazione.

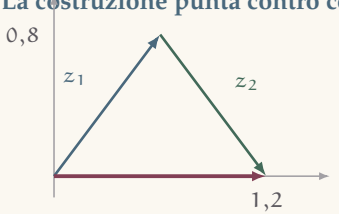
Identità di Eulero: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Gli angoli qui sono fasi delle ampiezze.

Feynman, *Lectures on Physics*, I, cap. 22.

Sommare le componenti delle ampiezze

La somma delle frecce corrisponde alla somma delle rispettive coordinate. Nell'esempio le parti immaginarie si compensano e le parti reali si sommano. Il programma ottiene quindi una risultante orizzontale di lunghezza 1,2. Questo calcolo conserva il segno e la fase dei contributi.

La costruzione punta contro coda



La risultante rossa collega l'origine alla punta dell'ultima freccia.

Lo stesso calcolo nel programma

$$z_1 = 0{,}6 + 0{,}8i$$
$$z_2 = 0{,}6 - 0{,}8i$$

reale: $0{,}6 + 0{,}6 = 1{,}2$
immaginaria: $0{,}8 - 0{,}8 = 0$

$$z_1 + z_2 = 1{,}2$$

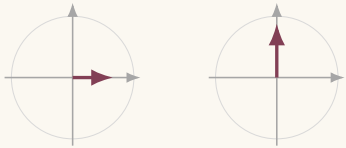
Questi numeri illustrano la somma delle ampiezze. Prima di ricavare probabilità occorre fissarne la normalizzazione.

Feynman, *Lectures on Physics*, I, cap. 22.

Ampiezze quantistiche nello stato simulato

Consideriamo una lettura con esiti A e B. Il programma conserva un'ampiezza complessa per ciascun esito: nell'esempio 0,6 e 0,8i. Il quadrato dei moduli dà le probabilità, mentre la fase relativa permette di prevedere le trasformazioni successive. La somma delle probabilità vale uno.

Un'ampiezza per ciascun esito



Dati della preparazione

$$(a_A, a_B) = (0{,}6;\ 0{,}8i)$$

$$P(A) = 0{,}6^2 = 0{,}36$$

$$P(B) = |0{,}8i|^2 = 0{,}64$$

Somma delle probabilità: $0{,}36 + 0{,}64 = 1$.
La componente B è avanti
di un quarto di ciclo.

A e B sono etichette dei due risultati. La coppia di numeri conserva moduli e fase relativa.

Esempio normalizzato a due esiti; notazione per componenti. Feynman, *Lectures on Physics*, III, §1–7.

Rinforzo e cancellazione delle ampiezze

Confrontiamo tre fasi mantenendo uguali i moduli dei due contributi alla stessa regione. Sommiamo prima le ampiezze, poi ne calcoliamo il modulo quadrato. I pesi risultano 4, 0 e 2. Le probabilità si ottengono confrontandoli con i pesi delle regioni raccolte.

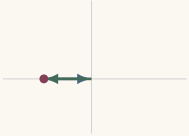
Fase $0°$



$1 + (1) = 2$

$w = |2|^2 = 4$

Fase $180°$



$1 + (-1) = 0$

$w = |0|^2 = 0$

Fase $90°$



$1 + (i) = 1 + i$

$w = |1 + i|^2 = 2$

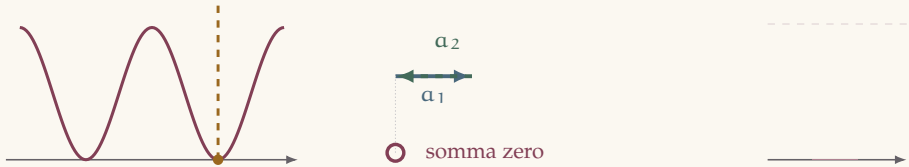
Blu e verde: contributi alla stessa regione; rosso: somma. I pesi richiedono la successiva normalizzazione.

Feynman, *Lectures on Physics*, III, §1–7.

Il peso di una regione dello schermo

Selezioniamo una regione e ricombiniamo le ampiezze dei due cammini. Variando la posizione cambia la fase relativa e quindi il peso. Il confronto dei pesi di tutte le regioni raccolte permette poi di calcolare le probabilità normalizzate.

Regione selezionata **Ampiezze in quella regione** **Contributo all'istogramma**



Modello locale a contributi uguali; inviluppo considerato costante nella porzione mostrata.

Le fasi determinano i minimi delle frange

Aumentare gli eventi rende più precisa la distribuzione simulata. Per due contributi separati di modulo uno, la somma dei pesi resta

$$|1|^2 + |-1|^2 = 1 + 1 = 2.$$

Il modello coerente somma prima le ampiezze:

$$|1 + (-1)|^2 = |0|^2 = 0.$$

Le fasi permettono la cancellazione. La somma delle frecce, seguita dal modulo quadro, applica la regola di Born.



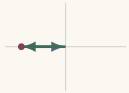


Frecce separate verticalmente per rendere visibili i contributi.

Si esamina l'ipotesi dei profili separati invariati. I campioni simulati illustrano il modello; la verifica fisica richiede misure indipendenti. Fonti: Haroche–Raimond, §2.2; Gerry–Knight, capp. 5–6.

Dalle frecce ai pesi degli impatti

Riprendiamo i due cammini e quattro regioni dello schermo. Il primo contributo vale uno; il secondo assume le fasi 0, $\pi/2$, π e $3\pi/2$. Sommiamo separatamente i contributi in ciascuna regione. I quadrati dei moduli forniscono i pesi 4, 2, 0, 2, ancora espressi in una scala comune arbitraria.

Regione 1	Regione 2	Regione 3	Regione 4
			
$a_1 = 1, \quad a_2 = 1$	$a_1 = 1, \quad a_2 = i$	$a_1 = 1, \quad a_2 = -1$	$a_1 = 1, \quad a_2 = -i$
$a = 2$	$a = 1 + i$	$a = 0$	$a = 1 - i$
$w = \lvert a\rvert^2 = 4$	$w = \lvert a\rvert^2 = 2$	$w = \lvert a\rvert^2 = 0$	$w = \lvert a\rvert^2 = 2$

Modello discreto: quattro regioni uguali, contributi assegnati nella stessa scala. Le fasi sono dati illustrativi.

Quattro regioni, dati illustrativi. Feynman, *Lectures on Physics*, III, §1–7.

Le quattro probabilità dello schermo

Le ampiezze del caso scelto sono $(2, 1+i, 0, 1-i)$. I pesi corrispondenti sono $(4, 2, 0, 2)$, poiché

$$|1 \pm i|^2 = (1 \pm i)(1 \mp i) = 1 - i^2 = 2.$$

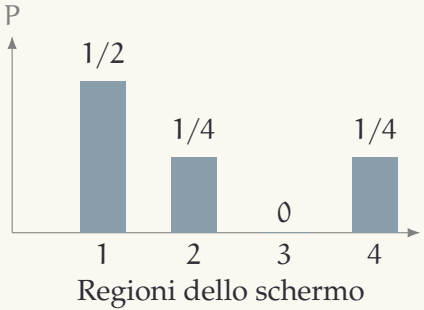
La somma vale $W = 4 + 2 + 0 + 2 = 8$:

$$P(1) = 4/8 = 1/2, \qquad P(2) = 2/8 = 1/4,$$

$$P(3) = 0/8 = 0, \qquad P(4) = 2/8 = 1/4.$$

Controllo:

$$\sum_{j=1}^{4} P(j) = (4 + 2 + 0 + 2)/8 = 1.$$



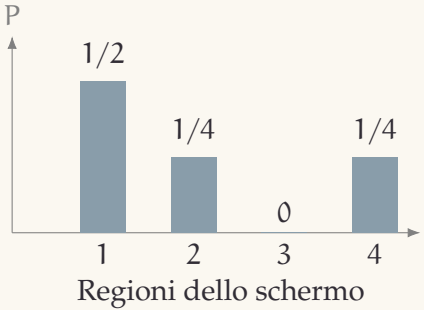
Le quattro regioni esauriscono gli esiti del modello; l'esempio esclude perdite ed efficienze differenti.

Normalizzare anche tutte le ampiezze

Per le ampiezze $(2, 1+i, 0, 1-i)$ e peso totale $W = 8$, dividiamo ciascun coefficiente per $\sqrt{8}$:

$$\psi = \left(\frac{2}{\sqrt{8}}, \frac{1+i}{\sqrt{8}}, 0, \frac{1-i}{\sqrt{8}} \right).$$

La divisione conserva le fasi relative e porta la norma a uno. Verifichiamo separatamente ciascuna componente.



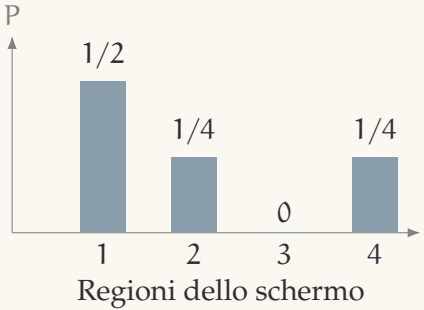
La radice di W normalizza le ampiezze; W normalizza i loro moduli quadri.

Verificare le quattro ampiezze normalizzate

Riprendiamo $\psi = (2, 1+i, 0, 1-i)/\sqrt{8}$. I quattro moduli quadri sono

$$|\psi_1|^2 = \frac{2^2}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$
$$|\psi_2|^2 = \frac{1^2 + 1^2}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},$$
$$|\psi_3|^2 = 0,$$
$$|\psi_4|^2 = \frac{1^2 + (-1)^2}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

La somma coincide con quella dei pesi normalizzati.



La radice di W normalizza le ampiezze; W normalizza i loro moduli quadri.

Normalizzare i pesi delle regioni raccolte

Le quattro regioni esauriscono gli esiti del nostro modello di raccolta. La loro somma di pesi vale otto; dividendo ogni peso per otto otteniamo probabilità la cui somma è uno. In modo equivalente, dividiamo ogni ampiezza per $\sqrt{8}$ e applichiamo la regola di Born. Il calcolo a destra svolge il caso della regione 2.

Dai pesi alle probabilità

regione	w_r	$P(r)$
1	4	1/2
2	2	1/4
3	0	0
4	2	1/4

$\sum_r w_r = 8 \qquad \sum_r P(r) = 1$

Una casella calcolata per intero

$$P(2) = \frac{w_2}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4} = \frac{2}{4+2+0+2} = \frac{1}{4}$$

$$\psi_r = \frac{a_r}{\sqrt{8}} \quad \Rightarrow \quad P(r) = |\psi_r|^2$$

La radice di otto normalizza le ampiezze; otto normalizza i loro quadrati.

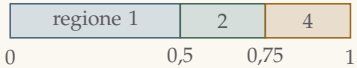
Probabilità condizionate a un impatto nelle quattro regioni raccolte. Efficienza uniforme; perdite escluse dall'esempio.

Normalizzazione dei pesi illustrativi. Feynman, *Lectures on Physics*, III, §1–7.

Dalle probabilità ai primi eventi

La distribuzione $(1/2;\ 1/4;\ 0;\ 1/4)$ divide l'intervallo da zero a uno in porzioni di quelle lunghezze. Un numero uniforme seleziona la regione corrispondente. Le quattro estrazioni mostrate producono conteggi $(2;\ 1;\ 0;\ 1)$. Questi sono risultati di un piccolo campione simulato; le probabilità descrivono le frequenze attese su molte ripetizioni.

Numeri fra zero e uno



un numero uniforme seleziona un intervallo proporzionale alla probabilità

Regione scelta e conteggio

numero	regione
0,13	1
0,61	2
0,02	1
0,95	4

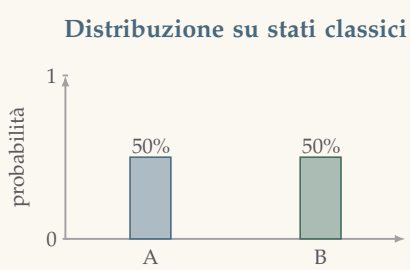
conteggi: 2, 1, 0, 1

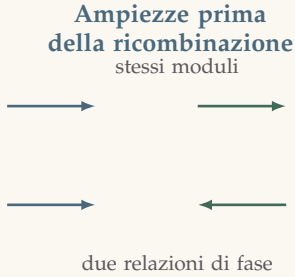
Quattro estrazioni illustrative. La regione 3 ha probabilità nulla e non occupa alcun intervallo nella scelta.

Feynman, *Lectures on Physics*, III, §1–7.

Distribuzioni classiche e ampiezze quantistiche

Una distribuzione classica assegna pesi a stati definiti nel modello. Per le alternative quantistiche interferenti occorre conservare anche le fasi delle ampiezze. Due preparazioni con uguali probabilità in una lettura possono produrre risultati differenti dopo la stessa ricombinazione.





Il confronto riguarda rappresentazioni e operazioni dichiarate. Probabilità di una singola lettura e stato completo svolgono ruoli differenti.

Feynman, *Lectures on Physics*, III, cap. 1. Calcoli illustrativi del modello.

Validazione della rappresentazione mediante ampiezze

Una descrizione fisica deve prevedere come cambiano i risultati al variare delle condizioni. Confrontiamo più fasi e geometrie, mantenendo dichiarate le grandezze controllate. I campioni generati dal programma verificano l'implementazione; la validazione fisica richiede acquisizioni sperimentali indipendenti.

Ripetere il confronto in più condizioni



Controlli indipendenti sul modello

- geometria dichiarata
- fase controllata
- nuove acquisizioni

la verifica usa misure che non provengono dal generatore del simulatore

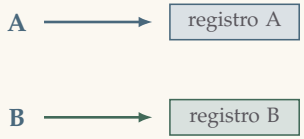
Profili teorici illustrativi per tre fasi. Le curve mostrano il tipo di confronto da svolgere, senza riprodurre dati sperimentali.

Feynman, *Lectures on Physics*, III, cap. 1. Calcoli illustrativi del modello.

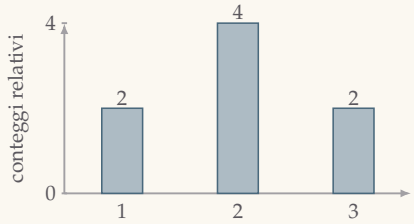
Cammini distinguibili: addizione delle probabilità

Una registrazione completa del cammino distingue i contributi associati alle due alternative. Se consideriamo tutte le tracce senza selezionarle, i conteggi locali si sommano. Nel modello ideale di marcatura la distribuzione risultante perde i termini di interferenza e conserva i profili dei singoli cammini.

Risultati associati a tracce distinte



Riunire i conteggi dei due gruppi

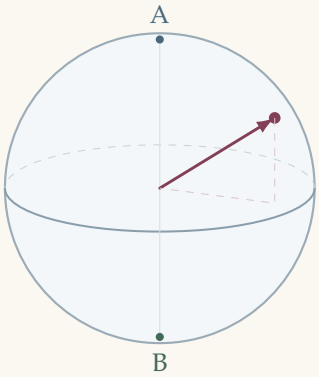


Cammini marcati da stati distinguibili. La somma riguarda probabilità degli esiti nei due gruppi, con i relativi pesi.

Feynman, *Lectures on Physics*, III, cap. 1. Calcoli illustrativi del modello.

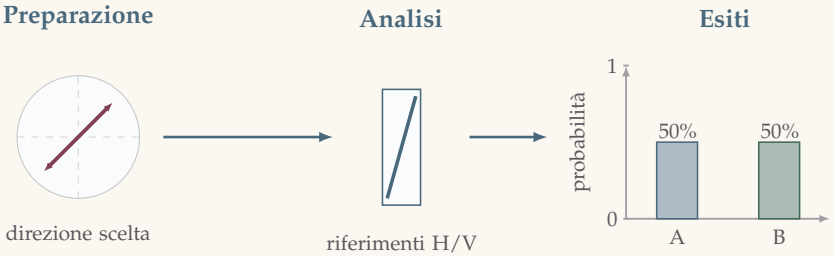
PARTE V

Stati a due alternative



Preparazioni e misure con due esiti

Consideriamo un apparato che distingue due esiti, chiamati A e B. La luce permette di preparare diverse polarizzazioni e di confrontarne le frequenze nella stessa lettura. Useremo queste trasformazioni per costruire un modello a due stati di riferimento e delle loro sovrapposizioni.

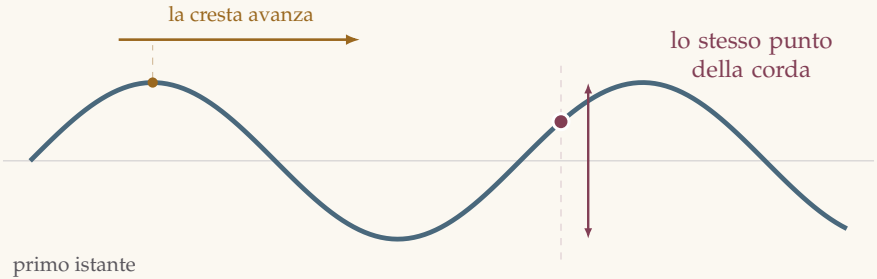


Le prove usano nuove preparazioni identiche. Un risultato A/B è distinto dallo stato preparato prima della misura.

Feynman, *Lectures on Physics*, I, cap. 33. Ottica ideale.

Un’onda avanza, la corda oscilla

Una perturbazione si propaga lungo una corda tesa. Seguendo un punto della corda vediamo che si muove trasversalmente, mentre la cresta raggiunge punti successivi. Distinguiamo così la direzione di propagazione da quella di oscillazione.

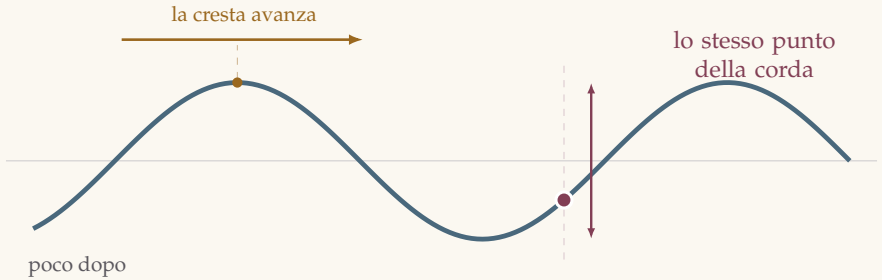


Il punto rosso oscilla attorno alla stessa posizione mentre la perturbazione avanza.

Riferimento: Halliday–Resnick, capitoli 15–17.

Un’onda avanza, la corda oscilla

Una perturbazione si propaga lungo una corda tesa. Seguendo un punto della corda vediamo che si muove trasversalmente, mentre la cresta raggiunge punti successivi. Distinguiamo così la direzione di propagazione da quella di oscillazione.

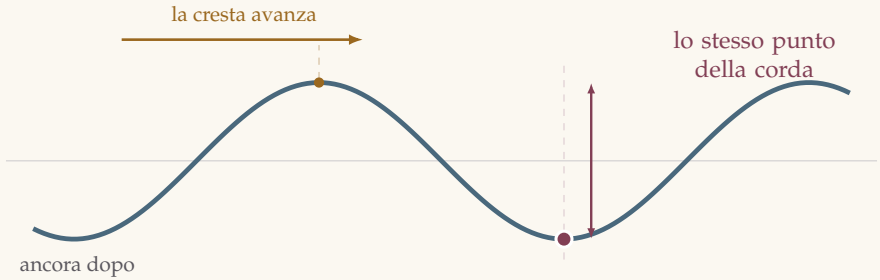


Il punto rosso oscilla attorno alla stessa posizione mentre la perturbazione avanza.

Riferimento: Halliday–Resnick, capitoli 15–17.

Un’onda avanza, la corda oscilla

Una perturbazione si propaga lungo una corda tesa. Seguendo un punto della corda vediamo che si muove trasversalmente, mentre la cresta raggiunge punti successivi. Distinguiamo così la direzione di propagazione da quella di oscillazione.



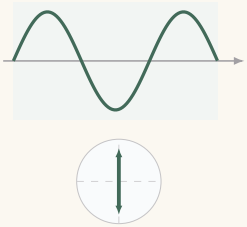
Il punto rosso oscilla attorno alla stessa posizione mentre la perturbazione avanza.

Riferimento: Halliday–Resnick, capitoli 15–17.

La stessa propagazione, oscillazioni diverse

Possiamo far oscillare la corda in un piano verticale, orizzontale oppure inclinato. La perturbazione avanza sempre lungo la corda. Nei tre disegni manteniamo uguali ampiezza e lunghezza d'onda e cambiamo soltanto il piano dell'oscillazione.

verticale

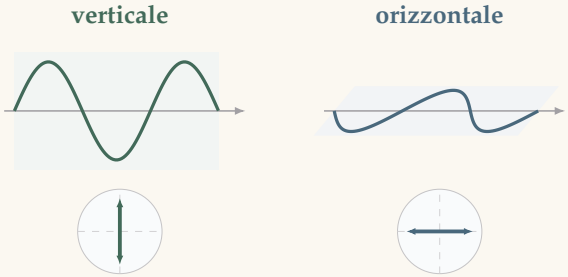


In basso, le oscillazioni viste lungo la direzione di propagazione.

Riferimento: Halliday–Resnick, capitoli 15–17.

La stessa propagazione, oscillazioni diverse

Possiamo far oscillare la corda in un piano verticale, orizzontale oppure inclinato. La perturbazione avanza sempre lungo la corda. Nei tre disegni manteniamo uguali ampiezza e lunghezza d'onda e cambiamo soltanto il piano dell'oscillazione.



In basso, le oscillazioni viste lungo la direzione di propagazione.

Riferimento: Halliday–Resnick, capitoli 15–17.

La stessa propagazione, oscillazioni diverse

Possiamo far oscillare la corda in un piano verticale, orizzontale oppure inclinato. La perturbazione avanza sempre lungo la corda. Nei tre disegni manteniamo uguali ampiezza e lunghezza d'onda e cambiamo soltanto il piano dell'oscillazione.



In basso, le oscillazioni viste lungo la direzione di propagazione.

Riferimento: Halliday–Resnick, capitoli 15–17.

L'oscillazione del campo elettrico

Per descrivere la luce rappresentiamo l'oscillazione del campo elettrico. Nelle onde considerate il campo oscilla perpendicolarmente alla propagazione. Se la sua direzione resta fissa, la luce è polarizzata linearmente. La vista frontale rende riconoscibile questa orientazione.

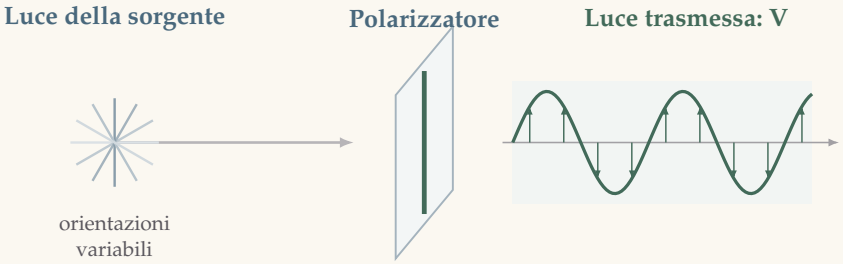


La direzione dell'oscillazione resta fissa: questa è una polarizzazione lineare.

Mostriamo il campo elettrico, sufficiente a descrivere la polarizzazione. Riferimento: OpenStax, *University Physics*, vol. 3, §1.7.

Preparare una polarizzazione

La luce della sorgente può avere orientazioni variabili. Un polarizzatore trasmette la componente del campo lungo il proprio asse. Ruotando il dispositivo scegliamo l'orientazione della luce che prosegue: verticale, indicata con V, oppure orizzontale, indicata con H.

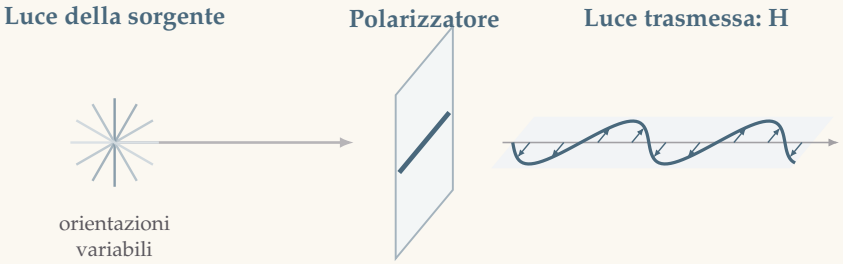


L'orientazione del polarizzatore stabilisce quella della luce trasmessa.

La linea sul filtro indica l'asse di trasmissione. Riferimento: OpenStax, *University Physics*, vol. 3, §1.7.

Preparare una polarizzazione

La luce della sorgente può avere orientazioni variabili. Un polarizzatore trasmette la componente del campo lungo il proprio asse. Ruotando il dispositivo scegliamo l'orientazione della luce che prosegue: verticale, indicata con V, oppure orizzontale, indicata con H.



L'orientazione del polarizzatore stabilisce quella della luce trasmessa.

La linea sul filtro indica l'asse di trasmissione. Riferimento: OpenStax, *University Physics*, vol. 3, §1.7.

Ruotare un secondo polarizzatore

Manteniamo la preparazione verticale e confrontiamo tre orientazioni del secondo filtro. La frazione di intensità trasmessa è 100%, 50% o zero per assi paralleli, a 45° o perpendicolari. I tre pannelli rappresentano prove differenti sulla stessa preparazione.

Paralleli



ingresso V asse del filtro

trasmesso: 100%
intensità rispetto
a quella incidente

A 45°



ingresso V asse del filtro

trasmesso: 50%
intensità rispetto
a quella incidente

Perpendicolari



ingresso V asse del filtro

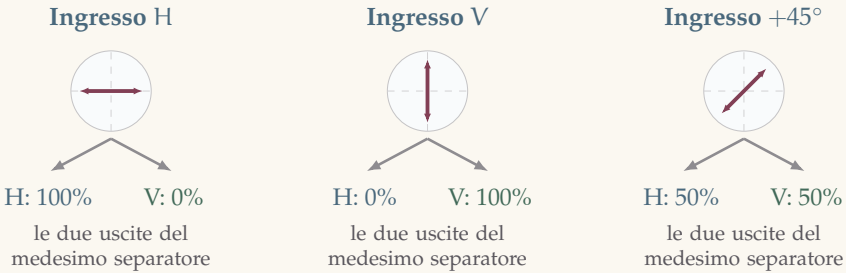
trasmesso: 0%
intensità rispetto
a quella incidente

Il primo polarizzatore prepara V; cambiamo soltanto il secondo. Luce trasmessa lungo il suo asse.

Valori della legge di Malus, come nella presentazione. Riferimento: OpenStax, *University Physics*, vol. 3, §1.7.

Raccogliere la luce in due uscite

Il separatore dirige le componenti H e V in canali distinti. Per un ingresso H o V, l'intera intensità va nel canale corrispondente. A 45°, le componenti hanno uguale modulo e ciascuna uscita raccoglie metà dell'intensità. Il dispositivo rimane fisso nei tre confronti.

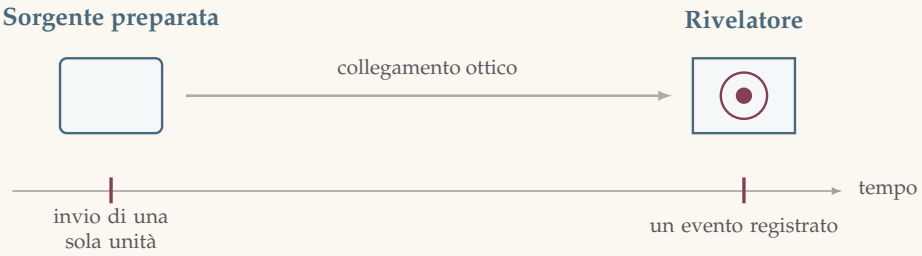


Fascio continuo e separatore ideale: percentuali di intensità. Ogni ingresso è provato separatamente.

Separatore polarizzante ideale. Gerry–Knight, capp. 5–6, come nella base.

Un pacchetto di luce alla volta

Per ogni prova la sorgente prepara una singola unità di luce. La chiameremo pacchetto di luce. Quando il rivelatore la assorbe, registra un evento. Seguiamo l'invio e la rivelazione della stessa prova.

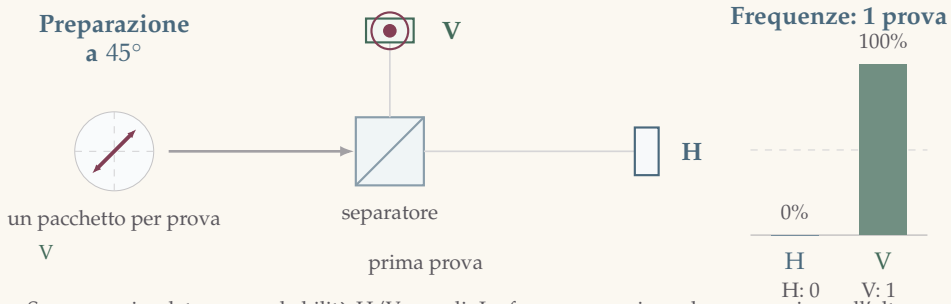


Questa singola unità di luce si chiama **fotone**.

Una semplice attenuazione non garantisce un solo pacchetto per prova. Consideriamo una sorgente dedicata e una rivelazione ideali. Esempio sperimentale: Higginbottom et al., 2016.

Rivelazione e frequenze nei due canali

Prepariamo ogni pacchetto a 45° e manteniamo fisso il separatore H/V. Ogni prova ideale produce un evento in uno dei due canali. Ripetendo l'esperimento stimiamo le probabilità dai conteggi. Per questa preparazione i due esiti hanno probabilità uguali.

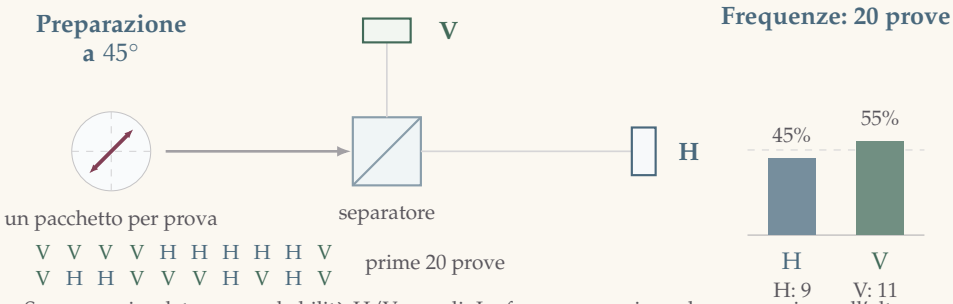


Sequenza simulata con probabilità H/V uguali. Le frequenze variano da un campione all'altro.

Campione simulato, seme 20260917. La linea tratteggiata nelle barre indica il 50%.

Rivelazione e frequenze nei due canali

Prepariamo ogni pacchetto a 45° e manteniamo fisso il separatore H/V. Ogni prova ideale produce un evento in uno dei due canali. Ripetendo l'esperimento stimiamo le probabilità dai conteggi. Per questa preparazione i due esiti hanno probabilità uguali.

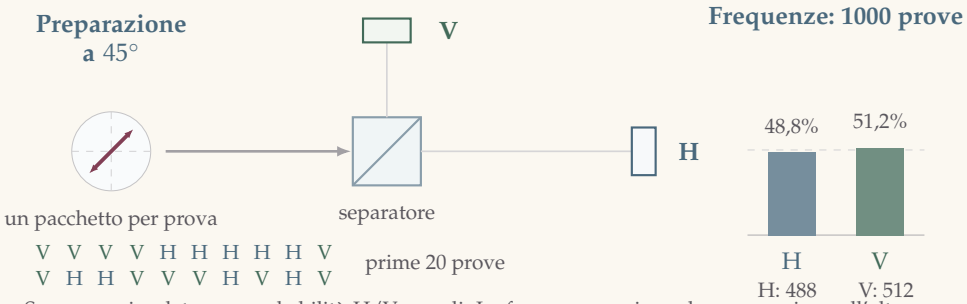


Sequenza simulata con probabilità H/V uguali. Le frequenze variano da un campione all'altro.

Campione simulato, seme 20260917. La linea tratteggiata nelle barre indica il 50%.

Rivelazione e frequenze nei due canali

Prepariamo ogni pacchetto a 45° e manteniamo fisso il separatore H/V. Ogni prova ideale produce un evento in uno dei due canali. Ripetendo l'esperimento stimiamo le probabilità dai conteggi. Per questa preparazione i due esiti hanno probabilità uguali.

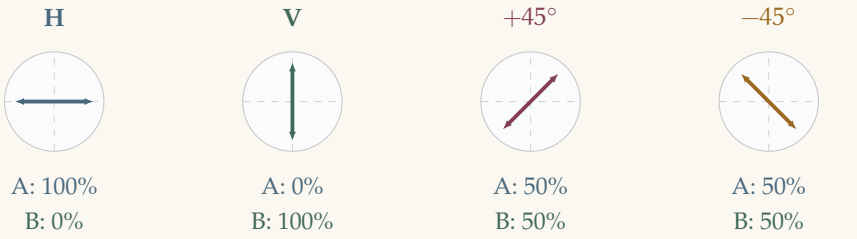


Sequenza simulata con probabilità H/V uguali. Le frequenze variano da un campione all'altro.

Campione simulato, seme 20260917. La linea tratteggiata nelle barre indica il 50%.

Due esiti, molte preparazioni

Le preparazioni a $+45°$ e $-45°$ danno le stesse probabilità nella misura H/V, pur avendo orientazioni diverse. Il qubit descrive questo sistema quantistico con due stati di riferimento e le loro sovrapposizioni. Per simularlo dobbiamo conservare anche le differenze che questa misura lascia indistinte.



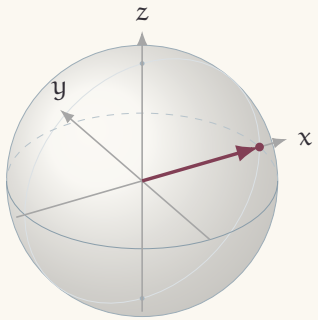
Probabilità del modello ideale. Riferimento: Mermin, capitolo 1.

Perché serve una mappa delle preparazioni

Due preparazioni bilanciate possono avere uguali pesi H/V e fasi relative diverse. La lettura H/V assegna a entrambe $(1/2, 1/2)$; una ricombinazione può distinguerle. La mappa di Bloch raccoglie le previsioni di tre letture fissate, indicate con x, y, z. A ciascuna associamo la differenza fra i due esiti:

$$r_k = P_k(+) - P_k(-), \qquad k = x, y, z.$$

Poiché $P_k(+) + P_k(-) = 1$, la coordinata varia fra -1 e 1.



La preparazione diagonale a fase zero ha coordinate $(1, 0, 0)$.

Il punto della mappa rappresenta le previsioni di misura della preparazione; gli assi sono riferimenti matematici.

Ricavare i pesi da una coordinata

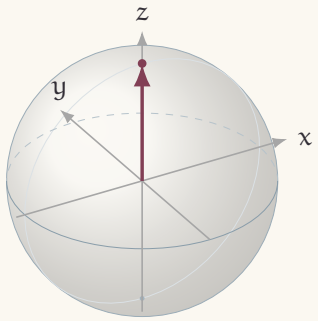
Per una lettura fissata scriviamo $r = P(+) - P(-)$.
Dalla normalizzazione, $P(-) = 1 - P(+)$.
Sostituendo:

$$r = P(+) - [1 - P(+)] = 2P(+) - 1.$$

Quindi

$$P(+) = \frac{1 + r}{2}, \qquad P(-) = \frac{1 - r}{2}.$$

Sia θ l'angolo dal polo $+z$. Sulla sfera pura la coordinata verticale è $r_z = \cos\theta$. I poli hanno $r_z = \pm 1$; l'equatore ha $r_z = 0$.

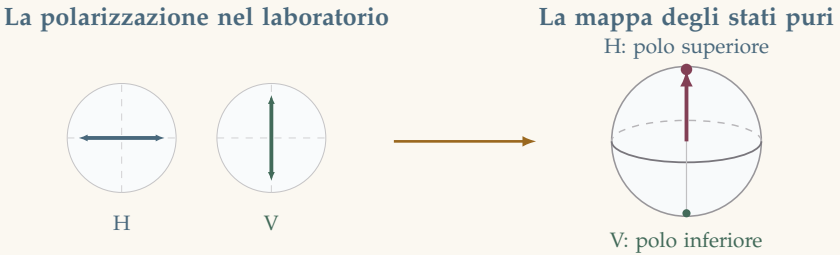


Al polo H: $r_z = 1$, quindi $P(H) = 1$ e $P(V) = 0$.

Questa costruzione motiva la legge con il coseno; il modulo 2 ricaverà la sfera dalle ampiezze normalizzate.

La sfera di Bloch: i due poli

Uno *stato puro* è descritto da una coppia normalizzata di ampiezze complesse. La sfera di Bloch rappresenta queste preparazioni: H occupa il polo superiore, V quello inferiore. Il punto determina le previsioni delle misure; gli assi sono riferimenti matematici, distinti dallo spazio del banco.

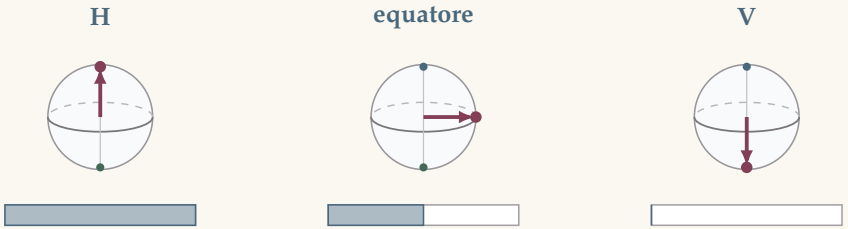


Mappa degli stati, distinta dallo spazio dell'apparato. H dà A con certezza; V dà B con certezza nella lettura H/V.

IBM Quantum Learning, sistemi composti.

Fra i poli: le probabilità di A e B

La posizione fra i due poli determina le probabilità della lettura H/V. Al polo H l'esito A è certo; al polo V è certo B. Sull'equatore le due probabilità sono uguali. Confrontare questi casi permette di leggere la mappa a partire da preparazioni già conosciute.



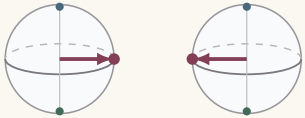
Stati puri. La barra indica P(A); P(B)=1-P(A). In generale $P(A)=(1+\cos\theta)/2$, con θ misurato dal polo H.

IBM Quantum Learning, sistemi composti; Mermin, cap. 1.

Punti diversi sull'equatore

Le preparazioni sull'equatore danno uguali probabilità per H e V. Cambiando posizione lungo l'equatore cambia la *fase relativa*, cioè l'angolo fra le due ampiezze H e V. Una stessa rotazione applicata a entrambe le ampiezze sarebbe invece una fase globale: non cambia le probabilità di alcuna misura e non identifica un nuovo punto della sfera.

Due punti dell'equatore



H/V: 50% e 50% in entrambi i casi

La differenza è nella fase relativa

stessi moduli; fasi relative diverse



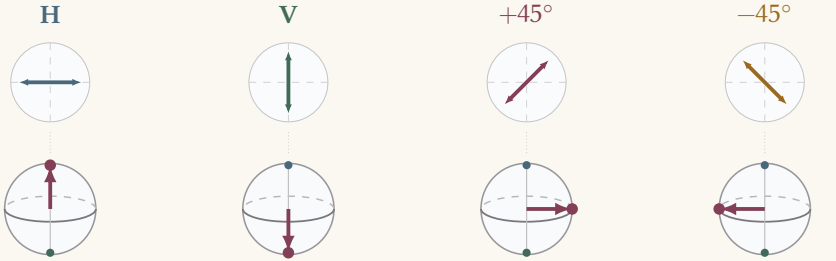
la ricombinazione distingue i due stati

Le due coppie di frecce rappresentano +45° e -45°. La distinzione verrà verificata con la stessa lamina di analisi.

IBM Quantum Learning, sistemi composti.

Le polarizzazioni sulla sfera di Bloch

Ritroviamo sulla sfera le quattro polarizzazioni già incontrate. H e V occupano i poli; $+45°$ e $-45°$ sono due punti opposti dell'equatore, che chiamiamo $+X$ e $-X$. Questi assi appartengono alla rappresentazione dello stato: l'orizzontale del campo corrisponde al polo H.



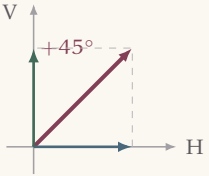
In alto, l'orientazione delle oscillazioni; in basso, il punto che rappresenta lo stesso stato.

Convenzione usata nel seguito: H dà A, V dà B nella misura H/V.

Una polarizzazione, due componenti

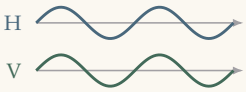
Un campo polarizzato a +45° ha due componenti H e V di uguale ampiezza, che oscillano in fase. Sono due componenti della stessa onda. Per il pacchetto preparato con questa polarizzazione, le ampiezze H e V conservano la medesima relazione e lo stato è il punto +X.

Il campo a un istante



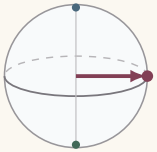
due proiezioni dello stesso campo

Le componenti nel tempo



ampiezze uguali, in fase

Lo stesso stato



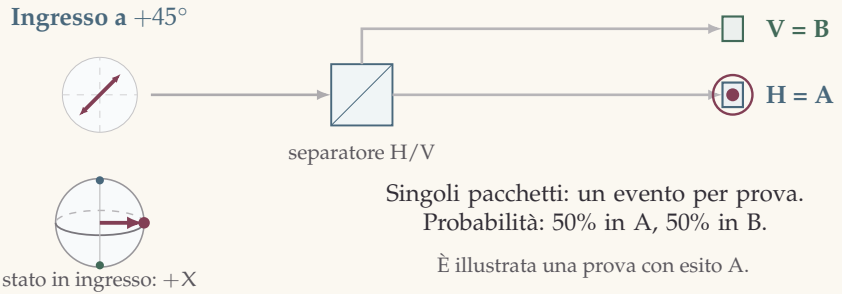
+X

La scomposizione descrive la preparazione: il punto sulla sfera resta fermo.

Il disegno del campo e le curve temporali si riferiscono al fascio classico.

Dal punto sulla sfera agli esiti H e V

Il punto sulla sfera descrive la preparazione a +45°. Le componenti H e V hanno uguale modulo. Un fascio continuo distribuisce metà dell'intensità in ciascuna uscita; inviando un fotone per prova, ogni rivelazione avviene in un solo canale e le probabilità sono 1/2 e 1/2.

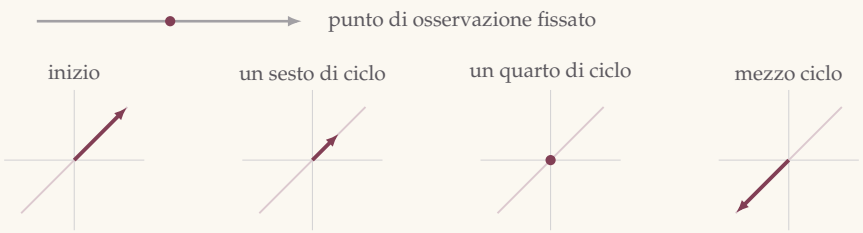


Le uscite indicano dove misuriamo; la sfera descrive la preparazione prima del separatore.

Modello ideale, senza perdite. Ogni rivelazione conclude la prova.

Il campo elettrico in un punto

Seguiamo il campo elettrico in un punto attraversato dalla luce. Durante un'oscillazione il campo cresce, si annulla e cambia verso. Per la polarizzazione lineare a $+45°$, tutti questi cambiamenti avvengono lungo la stessa diagonale.



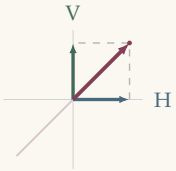
La freccia cambia lunghezza e verso lungo la stessa retta.
Le quattro viste descrivono lo stesso punto a istanti successivi. La luce si propaga attraverso quel punto.

Le frecce singole rappresentano il campo istantaneo di un fascio classico. Riferimento: Feynman, *Lectures on Physics*, I, cap. 33.

Dalle componenti alla direzione del campo

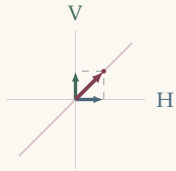
Leggiamo H e V nello stesso istante e usiamo i valori come coordinate della punta rossa. Nei tre casi le componenti valgono $(1,1)$, $(0{,}5,0{,}5)$ e $(-1,-1)$. La risultante cambia lunghezza e verso lungo la stessa diagonale a 45°: la polarizzazione è lineare.

Inizio



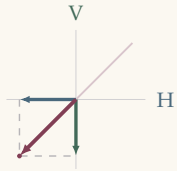
$(E_H; E_V) = (1; 1)$

Un sesto di ciclo



$(E_H; E_V) = (0{,}5; 0{,}5)$

Mezzo ciclo



$(E_H; E_V) = (-1; -1)$

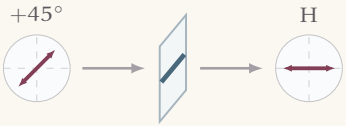
Blu: H; verde: V; rosso: somma. Stesso punto dello spazio e stessa scala in ogni istante.

Valori in unità convenzionali. Riferimento: Feynman, *Lectures on Physics*, I, cap. 33.

Polarizzatori e lamine

Il polarizzatore seleziona la componente lungo il proprio asse e attenua il fascio. Una lamina ideale trasmette entrambe le componenti e modifica la loro relazione di fase. Per descriverne l'effetto occorre conoscere le direzioni caratteristiche del materiale.

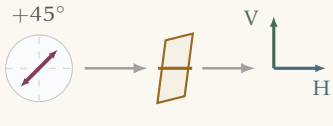
Polarizzatore, asse H



seleziona la componente H

50% dell'intensità incidente

Lamina ideale



trasmette entrambe le componenti

100% dell'intensità incidente

A destra sono indicate le due componenti trasmesse;
la loro fase relativa sarà determinata dalla lamina.

Confronto a uguale intensità incidente, per elementi ideali. Riferimento: Feynman, *Lectures on Physics*, I, cap. 33.

Le due direzioni della lamina

La lamina possiede due assi perpendicolari, chiamati veloce e lento. Scomponiamo il campo lungo queste direzioni. Cominciamo con gli assi allineati a H e V, così da seguire le componenti già utilizzate per descrivere la polarizzazione.

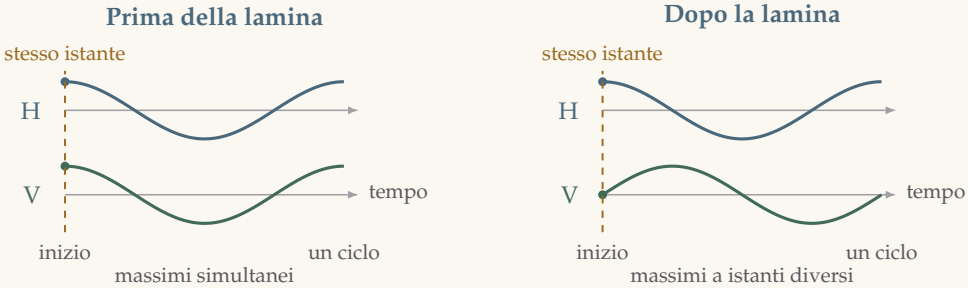


I due assi sono perpendicolari. L'orientazione scelta li fa coincidere con i riferimenti H e V.

Assi della lamina nel piano trasversale. Modello ideale. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Optics*, lezione 22, pp. 1–5.

Il ritardo fra le componenti

Nel materiale, le oscillazioni lungo l'asse veloce e quello lento accumulano fasi diverse. Due componenti inizialmente in fase possono quindi uscire sfasate. Prendendo H come riferimento, seguiamo il ritardo di V e confrontiamo gli istanti dei loro massimi.

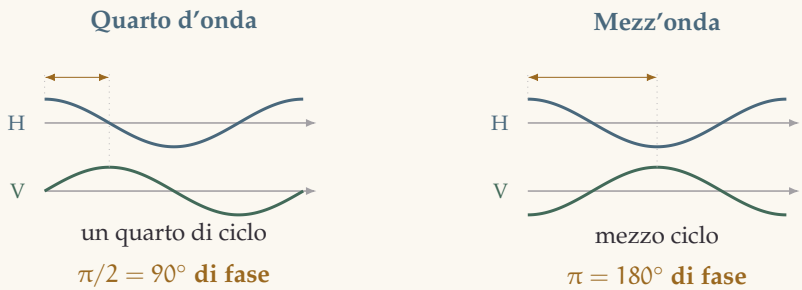


Confrontiamo la fase di V con quella di H. Le ampiezze delle componenti restano uguali.

Esempio con un quarto di ciclo di ritardo relativo. Lamine ideali alla lunghezza d'onda di progetto; perdite trascurabili. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Quarter-wave Plate*.

Un quarto di ciclo e mezzo ciclo

Il nome della lamina indica il ritardo relativo introdotto fra le componenti. Un quarto d'onda aggiunge un quarto di ciclo, pari a $\pi/2$ di fase. Una mezz'onda aggiunge mezzo ciclo, pari a π. Questi valori valgono alla lunghezza d'onda di progetto.



I ritardi confrontano le oscillazioni lungo i due assi. Un periodo completo corrisponde a un ciclo.

Ritardi espressi a meno di cicli interi. Modello ideale. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Optics*, lezione 22, pp. 1–5.

Mezzo ciclo modifica il segno relativo

Una sinusoide sfasata di mezzo ciclo assume il valore opposto. La mezz'onda con assi H/V introduce questo cambiamento relativo fra le componenti. Le curve e la tabella mostrano lo stesso risultato in tre istanti: quando H punta a destra, V punta in basso; dopo mezzo ciclo si invertono entrambi i versi.

Mezzo ciclo fra H e V



$$\cos(\tau - \pi) = -\cos\tau$$

Ogni valore di V ha segno opposto a quello di H nello stesso istante.

Tre letture simultanee

tempo	H	V
0	1	−1
T/6	0,5	−0,5
T/2	−1	1

Mezz'onda con assi H/V; componenti uguali. H fissa l'origine temporale; il ritardo è relativo.

Modello ideale. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Optics*, lezione 22, pp. 1–5.

La risultante segue una nuova diagonale

Le coppie di valori $(1,-1)$, $(0{,}5,-0{,}5)$ e $(-1,1)$ hanno sempre componenti opposte. La punta della somma resta quindi sulla diagonale a $-45°$. Il confronto con la diagonale precedente mostra l'effetto dello sfasamento: in entrambi i casi il ciclo del campo si svolge lungo una retta.

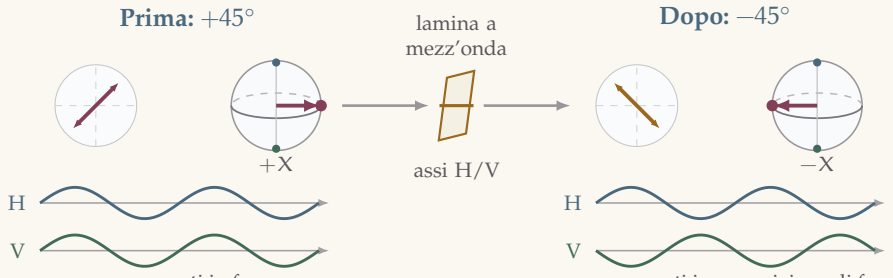


Blu: H; verde: V; rosso: somma. Stesso punto dello spazio e stessa scala in ogni istante.

Le rette chiare indicano la direzione dell'oscillazione. Riferimento: Feynman, *Lectures on Physics*, I, cap. 33.

Mezzo ciclo cambia la polarizzazione

Ritroviamo nell'apparato il passaggio appena costruito. La mezz'onda con assi H/V porta le componenti da concordi a opposte e la polarizzazione lineare da $+45°$ a $-45°$. Le sfere rappresentano i due stati: il punto passa da $+X$ a $-X$.

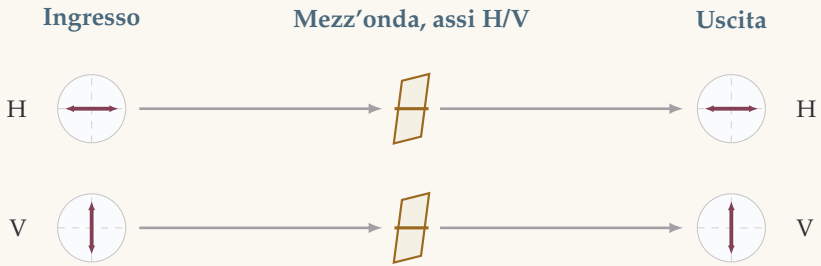


Le due polarizzazioni sono lineari. Le sfere raffigurano gli stati; i grafici mostrano le oscillazioni del campo.

Le curve mostrano le componenti di un fascio classico prima e dopo la lamina. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Half-wave Plate*. Lamine e rivelatori ideali.

Una polarizzazione lungo un asse della lamina

Manteniamo la mezz'onda con assi H/V e cambiamo l'ingresso. H ha soltanto la componente orizzontale, V soltanto quella verticale. La fase dell'oscillazione può cambiare; la direzione della polarizzazione resta quella iniziale.



L'ampiezza lungo l'altro asse è nulla. La direzione della polarizzazione si conserva.

La doppia freccia indica una direzione di polarizzazione lineare. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Half-wave Plate*.

Descrivere l'operazione prima del componente

Per seguire una trasformazione specifichiamo il suo effetto sulle ampiezze. Useremo H e V come riferimenti della polarizzazione; nella lettura fissata corrispondono agli esiti A e B.

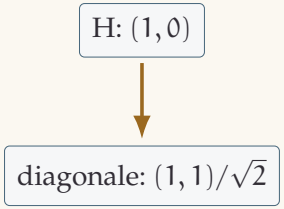
La ricombinazione trasforma (a_H, a_V) in

$$\left(\frac{a_H + a_V}{\sqrt{2}}, \frac{a_H - a_V}{\sqrt{2}}\right).$$

Su H, cioè $(1, 0)$, produce

$$\left(\frac{1+0}{\sqrt{2}}, \frac{1-0}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Le due probabilità valgono $1/2$.



Due componenti uguali e in fase.

Una mezz'onda orientata a $22{,}5°$ realizza questa trasformazione nella convenzione scelta. Il funzionamento del materiale è l'approfondimento successivo.

Ricombinare le due ampiezze uguali

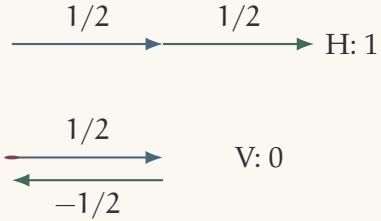
L'ingresso è $(a_H, a_V) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, a fase zero.
Per H:

$$a'_H = \frac{1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2/\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Per l'uscita V:

$$a'_V = \frac{1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0.$$

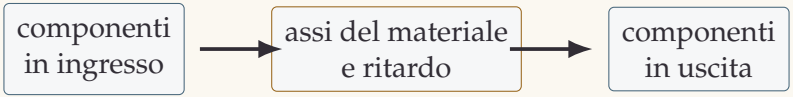
$P(H) = |1|^2 = 1$, $P(V) = |0|^2 = 0$: la somma è uno.



Ogni contributo vale $(1/\sqrt{2})(1/\sqrt{2}) = 1/2$.

Approfondimento fisico: realizzare la ricombinazione

L'operazione è già definita attraverso le ampiezze. Esaminiamo ora come una lamina possa realizzarla: il materiale introduce un ritardo fra due componenti, mentre l'orientazione degli assi determina quali componenti vengono ritardate.

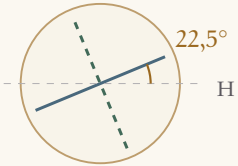


Torna all'operazione Prosegui alle preparazioni e alle letture

L’orientazione della lamina

Ruotando la lamina cambiano le direzioni lungo cui scomponiamo il campo. Un asse può formare 22,5° con H; il ritardo della mezz’onda resta mezzo ciclo. L’orientazione nello spazio e lo sfasamento delle oscillazioni sono due dati distinti.

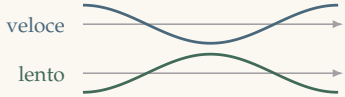
Orientazione degli assi



angolo rispetto al riferimento H

Ritardo relativo

mezzo ciclo



180° di fase fra le oscillazioni

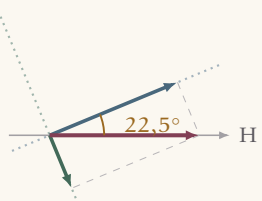
Ruotiamo gli assi della mezz’onda; il suo ritardo relativo resta mezzo ciclo.

Blu: asse veloce. Verde tratteggiato: asse lento. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Half-wave Plate*.

Scomporre H lungo gli assi della lamina

Consideriamo un ingresso H e una mezz'onda con asse veloce a 22,5°. Il campo orizzontale ha una proiezione lungo ciascuno dei due assi della lamina. Le frecce blu e verde mostrano queste componenti; sommandole ritroviamo il campo incidente.

Assi della lamina a 22,5°



Le due proiezioni di H

lungo l'asse veloce

lungo l'asse lento

somma: campo orizzontale

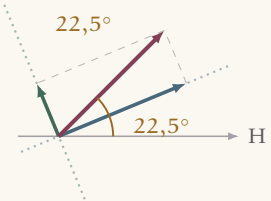
Le componenti blu e verde sono proiezioni lungo gli assi inclinati della lamina.

Costruzione vettoriale a un istante di riferimento, nella vista frontale. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Half-wave Plate*.

Da H alla polarizzazione a +45°

Il ritardo di mezzo ciclo cambia il segno di una componente rispetto all'altra. La somma delle due frecce punta ora a +45°. L'asse a 22,5° divide in due parti uguali l'angolo fra la direzione iniziale e quella finale.

Assi della lamina a 22,5°



Dopo mezzo ciclo di ritardo

la componente veloce
fa da riferimento
la componente
lenta cambia segno

somma: campo a +45°

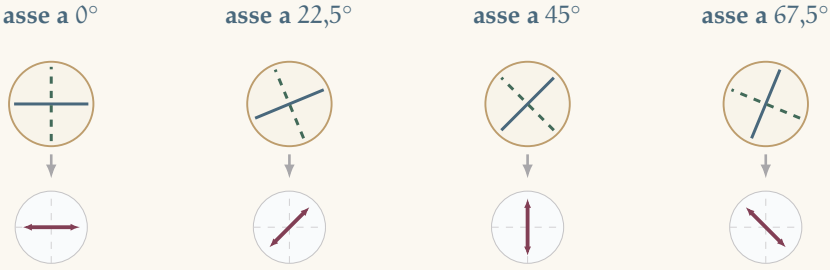
$$2 \cdot 22{,}5° - 0° = 45°$$

Il campo finale è simmetrico al campo iniziale rispetto all'asse veloce della lamina.

Fase comune omessa. I vettori sono calcolati nella stessa scala della slide precedente. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Half-wave Plate*.

Ruotare la lamina mantenendo fisso l'ingresso

Ripetiamo la preparazione H e cambiamo l'orientazione della mezz'onda. La direzione in uscita è simmetrica all'ingresso rispetto all'asse della lamina. I quattro esempi producono H, $+45°$, V e $-45°$.

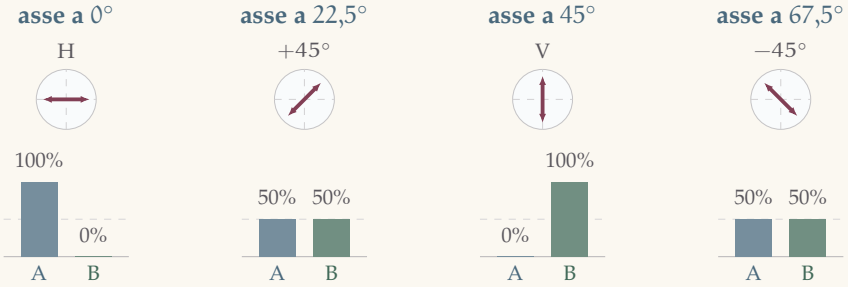


In ogni prova entra H. In alto, gli assi della mezz'onda; in basso, la polarizzazione in uscita.

Gli angoli si misurano da H. Le direzioni $135°$ e $-45°$ indicano la stessa polarizzazione lineare. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Half-wave Plate*.

Le probabilità dopo la lamina

Misuriamo le quattro uscite con lo stesso separatore H/V. H e V danno esiti certi in rivelatori differenti. Le due polarizzazioni diagonali hanno componenti di uguale modulo e producono entrambe il 50% di A e il 50% di B.



Le quattro uscite vengono misurate nella stessa base H/V, con A associato a H e B a V.

Probabilità teoriche per preparazioni ripetute; lamine e rivelatori ideali. Modello ideale. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Optics*, lezione 22, pp. 1–5.

Due preparazioni con le stesse frequenze

Le preparazioni a $+45°$ e $-45°$ danno entrambe il 50% di A e il 50% di B. Quali dati permettono di prevedere l'effetto della mezz'onda a 22,5°?

Probabilità della misura A/B

Conserviamo i due valori 50% e 50%. I dati sono identici per le due preparazioni.

Ampiezze e fase relativa

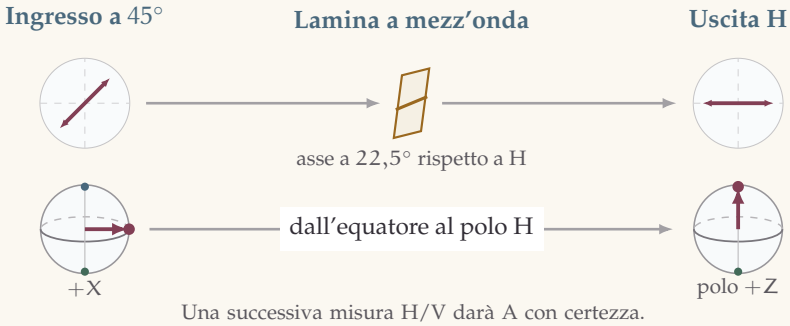
Conserviamo le due componenti H e V e la loro fase relativa. Le preparazioni a $+45°$ e $-45°$ differiscono per mezzo ciclo.

Confrontiamo l'effetto della stessa lamina sulle due preparazioni.

Riscontro commentato: la stessa mezz'onda porta le due diagonali in H e V.

Da +45° alla polarizzazione H

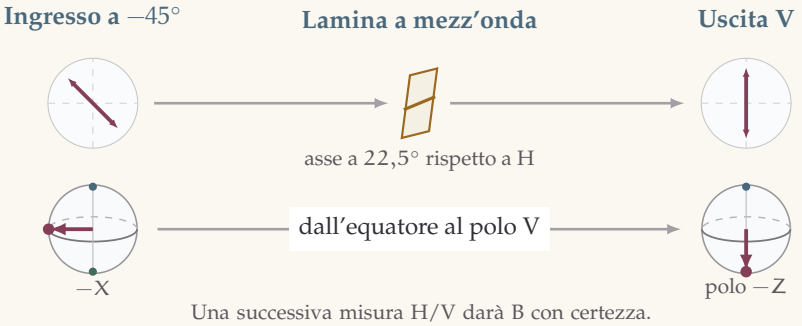
Riprendiamo la mezz'onda con asse a 22,5° rispetto a H e usiamo come ingresso +45°. La simmetria rispetto all'asse della lamina riporta la polarizzazione in H. Sulla sfera, la trasformazione porta +X al polo superiore.



La lamina trasforma la polarizzazione; il separatore H/V verrà usato per misurarla. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Half-wave Plate*. Lamine e rivelatori ideali.

La stessa lamina porta $-45°$ in V

Lasciamo la lamina nella stessa posizione e prepariamo l'ingresso a $-45°$. Questa volta la luce in uscita è polarizzata V: il punto $-X$ raggiunge il polo inferiore. La differenza di fase, invisibile alla misura H/V iniziale, determina ora due esiti distinguibili.

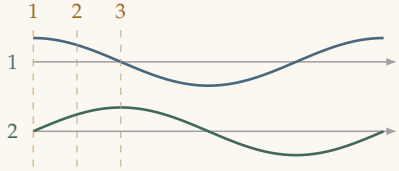


Stesso dispositivo e stessa orientazione della slide precedente. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Half-wave Plate*. Lamine e rivelatori ideali.

Un quarto di ciclo fra le componenti

Passiamo a due componenti uguali, separate da un quarto di ciclo. All'inizio H è massima e V è nulla; dopo un ottavo di ciclo contribuiscono entrambe; dopo un quarto H è nulla e V è massima. La tabella legge le due oscillazioni agli stessi istanti e prepara la somma dei vettori.

Due oscillazioni nello stesso punto



Un periodo completo; tre istanti evidenziati.

Valori simultanei

istante	1	2
0	1	0
T/8	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
T/4	0	1

$1/\sqrt{2} \simeq 0{,}71$. Ogni riga legge le due curve alla stessa coordinata temporale.

In questa figura 1 = H e 2 = V. La fase di H fissa l'origine temporale; stesso punto dello spazio.

Componenti di uguale ampiezza. Riferimento: Feynman, *Lectures on Physics*, I, cap. 33.

Somma delle componenti sfasate

All'inizio la somma coincide con H. Dopo un ottavo di ciclo, le due componenti positive hanno valore $1/\sqrt{2} \simeq 0{,}71$ e la freccia punta lungo la diagonale. Dopo un quarto di ciclo coincide con V. Fra questi istanti la direzione cambia con continuità e il modulo della risultante resta costante.



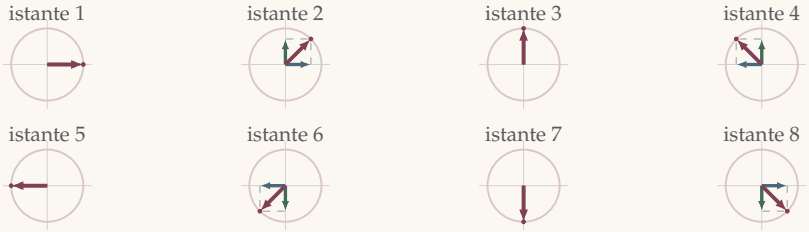
Il tratteggio ricostruisce la somma; tutte le risultanti hanno modulo uno nella scala scelta.

Tre istanti consecutivi dello stesso ciclo, stesso punto e stessa scala. Riferimento: Feynman, *Lectures on Physics*, I, cap. 33.

La risultante cambia direzione

Sommiamo H e V in otto istanti successivi: il campo passa dall'orizzontale alla diagonale e alla verticale, poi completa il giro. Le risultanti hanno uguale lunghezza e le punte formano una circonferenza. La polarizzazione è circolare per le ampiezze uguali e il quarto di ciclo di sfasamento qui fissati.

Otto istanti distanziati di un ottavo di ciclo

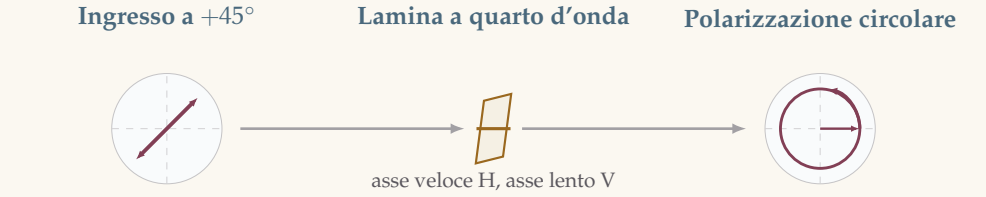


La punta della freccia rossa percorre una circonferenza. La polarizzazione è circolare.

Le viste rappresentano istanti successivi del campo nello stesso punto. Riferimento: Feynman, *Lectures on Physics*, I, cap. 33.

Preparare una polarizzazione circolare

Prepariamo la luce a $+45°$ rispetto agli assi di un quarto d'onda. Le componenti H e V entrano con uguale ampiezza e in fase. Il ritardo introdotto dalla lamina realizza lo sfasamento appena studiato e produce la polarizzazione circolare.



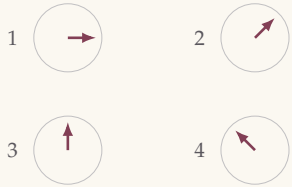
La circonferenza descrive il campo nel tempo in un punto. La luce prosegue lungo il fascio.

Con ampiezze differenti l'uscita è in generale ellittica. Lamine ideali alla lunghezza d'onda di progetto; perdite trascurabili. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Quarter-wave Plate*.

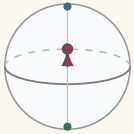
Due rappresentazioni della stessa luce

La freccia del campo cambia direzione durante un periodo. I quattro dischi riuniscono gli istanti successivi della sequenza. Le ampiezze relative H/V e la loro differenza di fase restano uguali: sulla sfera di Bloch lo stato conserva la stessa posizione. Le due figure rappresentano aspetti distinti della stessa luce.

Campo elettrico: quattro istanti



Stato di polarizzazione: un punto



Le ampiezze e la fase relativa rimangono costanti.
Il punto sulla sfera resta fermo.

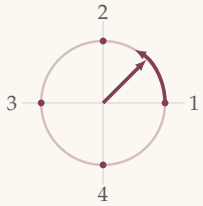
Il tempo avanza nel fascio monocromatico; la preparazione di polarizzazione è la stessa.

Convenzione della presentazione: H = +Z, V = −Z. Riferimento: Feynman, *Lectures on Physics*, I, cap. 33.

I due versi della polarizzazione circolare

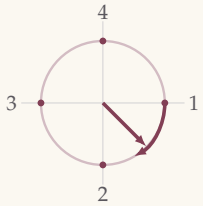
Seguiamo due polarizzazioni circolari dalla stessa vista frontale. Un quarto di ciclo e tre quarti di ciclo fra H e V producono versi di rotazione opposti. In entrambi i casi il campo ha lunghezza costante e completa un giro durante ogni periodo.

Un quarto di ciclo



fase relativa: 90°

Tre quarti di ciclo



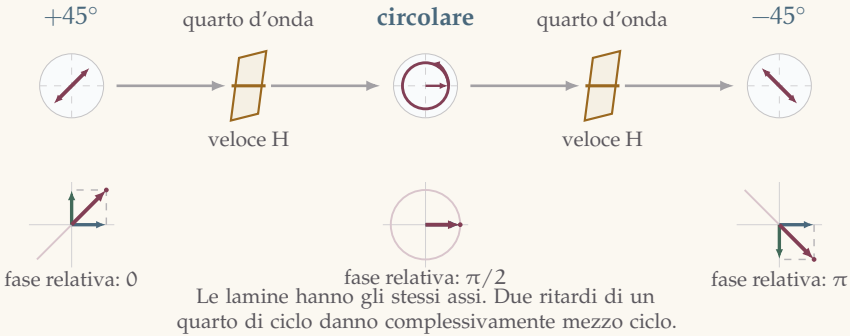
fase relativa: 270°

I numeri seguono il tempo nello stesso punto e dalla stessa vista. Le due rotazioni hanno verso opposto.

La circonferenza è percorsa dalla punta del vettore campo in un punto fissato. Riferimento: Feynman, *Lectures on Physics*, I, cap. 33.

Un altro quarto di ciclo restituisce una retta

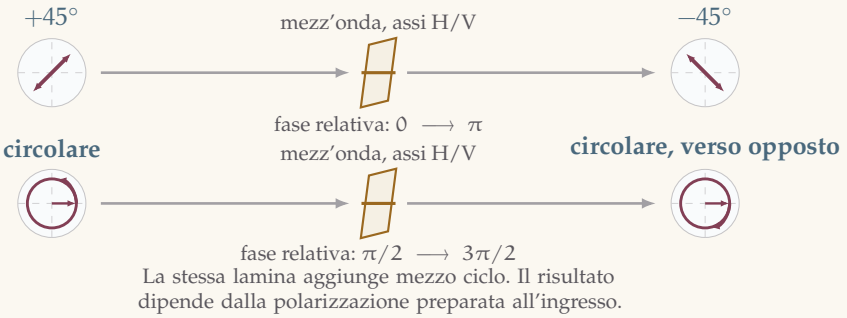
La luce a $+45°$ attraversa due quarti d'onda con gli stessi assi. Dopo il primo è circolare; il secondo porta lo sfasamento totale a mezzo ciclo. Le componenti tornano in opposizione e il campo oscilla lungo la diagonale a $-45°$.



Le figure inferiori usano la fase di H come riferimento. I due ritardi si sommano. Modello ideale. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Optics*, lezione 22, pp. 1–5.

La mezz'onda con una polarizzazione circolare

Applichiamo la stessa mezz'onda a due ingressi. Per $+45°$ si ottiene la diagonale opposta. Per un ingresso circolare, il ritardo passa da un quarto a tre quarti di ciclo: il campo resta circolare e inverte il verso di rotazione.

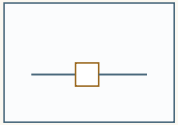


Mezz'onda con assi H/V in entrambe le prove. Modello ideale. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Optics*, lezione 22, pp. 1–5.

La luce e le altre realizzazioni del qubit

Le lamine ci hanno permesso di controllare ampiezze e fase relativa e di prevedere gli esiti H/V. Lo stesso modello descrive altre coppie di stati fisici, come due livelli atomici o due livelli di un circuito. La sezione hardware spiegherà come vengono preparati, trasformati e misurati.

lo stesso modello, supporti fisici differenti

Polarizzazione	**Stati interni**	**Circuito**
		
due ampiezze e una fase relativa	due ampiezze e una fase relativa	due ampiezze e una fase relativa

Tre supporti schematici. La rappresentazione del qubit resta comune; apparati di controllo e lettura dipendono dalla realizzazione.

IBM Quantum Learning, sistemi composti; Mermin, cap. 1.

La stessa preparazione, letture diverse

Prepariamo ogni volta la luce a +45° e cambiamo il riferimento dell'analizzatore. La preparazione resta uguale, mentre le probabilità dipendono dalla lettura scelta. Questo confronto distingue le informazioni conservate nello stato dai risultati accessibili con una specifica misura.

Analisi H/V



stessa preparazione +45°

primo esito: 50%

Analisi diagonali



stessa preparazione +45°

primo esito: 100%

Analisi V/H



stessi assi H/V;
ordine degli esiti scambiato

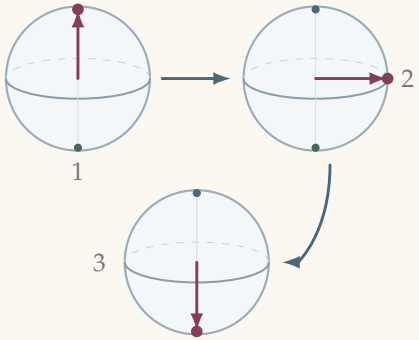
primo esito: 50%

Tratto rosso: polarizzazione preparata. Asse tratteggiato: primo riferimento dell'analisi. Nuove preparazioni per ciascuna lettura.

Feynman, *Lectures on Physics*, I, cap. 33. Ottica ideale.

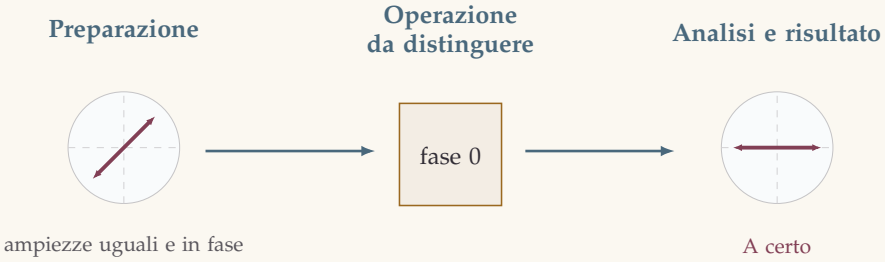
PARTE VI

Il calcolo quantistico



Distinguere due operazioni

Usiamo la stessa preparazione e la stessa analisi finale per esaminare due possibili operazioni intermedie. Una conserva la fase relativa, l'altra aggiunge mezzo ciclo. La ricombinazione converte questa differenza in risultati distinti, che il programma può usare per identificare l'operazione.

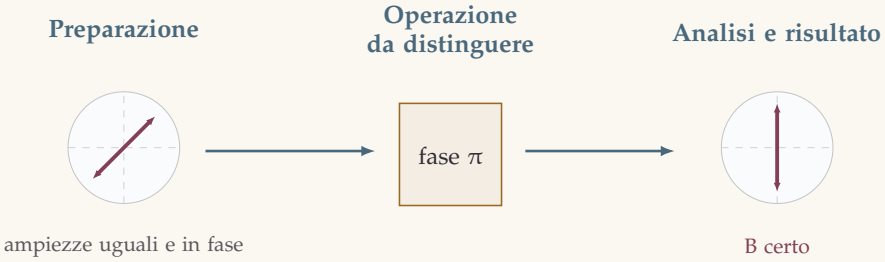


Modello ideale delle sequenze ottiche già studiate. Il compito riguarda due azioni dichiarate; nessun vantaggio di complessità è assunto.

Feynman, *Lectures on Physics*, I, cap. 33. Ottica ideale.

Distinguere due operazioni

Usiamo la stessa preparazione e la stessa analisi finale per esaminare due possibili operazioni intermedie. Una conserva la fase relativa, l'altra aggiunge mezzo ciclo. La ricombinazione converte questa differenza in risultati distinti, che il programma può usare per identificare l'operazione.



Modello ideale delle sequenze ottiche già studiate. Il compito riguarda due azioni dichiarate; nessun vantaggio di complessità è assunto.

Feynman, *Lectures on Physics*, I, cap. 33. Ottica ideale.

In quale momento effettuare la misura?

Dopo l'operazione intermedia, le probabilità di A e B sono ancora uguali nei due casi. Quale sequenza permette di distinguerli?

Misura immediata

Misuriamo A oppure B subito dopo l'operazione che lascia invariata o inverte la fase relativa.

Ricombinazione e misura

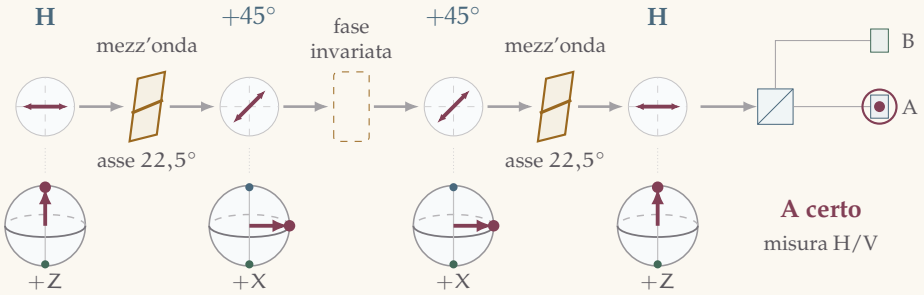
Applichiamo prima la stessa ricombinazione delle ampiezze e misuriamo poi A oppure B.

Confrontiamo le probabilità finali nelle due sequenze.

Riscontro commentato: ricombinare prima della misura finale.

La sequenza completa: fase invariata

Partiamo da H. La prima mezz'onda a 22,5° prepara +45°. La fase resta invariata fino alla seconda mezz'onda, orientata come la prima. Ricombinando le componenti dello stesso fascio, questa riporta la luce in H: A è certo.

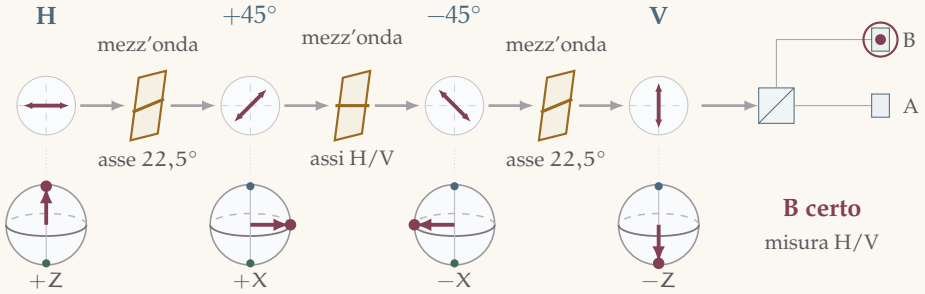


Le sfere descrivono gli stati lungo il percorso. La rivelazione avviene soltanto alla fine.

Le lamine di preparazione e ricombinazione hanno l'asse a 22,5° rispetto a H. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Half-wave Plate*. Lamine e rivelatori ideali.

La sequenza completa: mezzo ciclo in più

Partiamo ancora da H e inseriamo fra le due lamine una mezz'onda con gli assi lungo H e V. Il ritardo di mezzo ciclo porta $+45°$ in $-45°$. La mezz'onda finale, sempre a 22,5°, produce V: il rivelatore B registra l'esito con certezza.

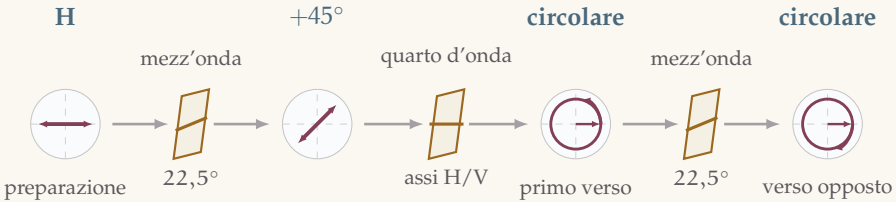


Le sfere descrivono gli stati lungo il percorso. La rivelazione avviene soltanto alla fine.

La lamina intermedia ha gli assi lungo H e V. Confronto fra due operazioni ideali. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Half-wave Plate*. Lamine e rivelatori ideali.

Un quarto di ciclo nella sequenza

Inseriamo un quarto d'onda fra le due mezz'onde a 22,5°. La prima prepara +45°, il quarto d'onda produce la circolare e l'ultima mezz'onda ne inverte il verso. Seguiamo questi passaggi prima di aggiungere i rivelatori.



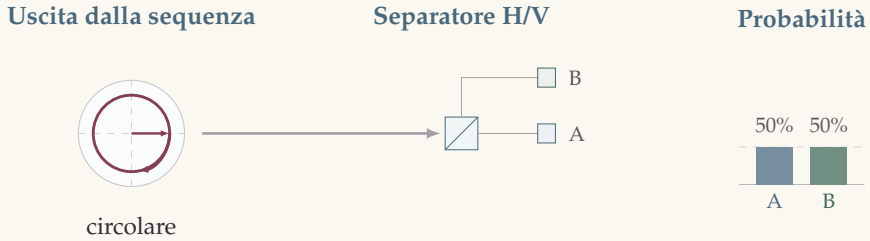
L'ultima mezz'onda cambia il verso della polarizzazione circolare.

Seguiamo la polarizzazione lungo l'apparato. Il separatore e i rivelatori vengono aggiunti nella slide successiva.

Quarto d'onda veloce H; mezz'onde a 22,5°. Modello ideale. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Optics*, lezione 22, pp. 1–5.

La lettura dopo un quarto di ciclo

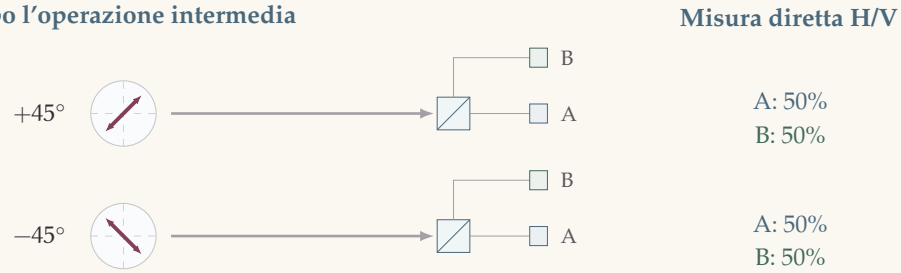
L'uscita della sequenza è polarizzata circolarmente. Le componenti H e V hanno uguale modulo, quindi la misura dà A e B con la stessa probabilità. Ogni prova termina con un evento; ripetendo la preparazione si stimano le frequenze dei due risultati.



Le barre indicano probabilità teoriche, ottenute dal quadrato del modulo delle ampiezze H e V. Modello ideale. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Optics*, lezione 22, pp. 1–5.

La lettura prima della seconda lamina

Misuriamo prima della seconda mezz'onda, nelle sequenze con fase invariata e mezzo ciclo di ritardo. Al separatore arriva $+45°$ oppure $-45°$: entrambe danno esiti equiprobabili. La lamina finale rendeva distinguibili queste preparazioni attraverso i rivelatori A e B.

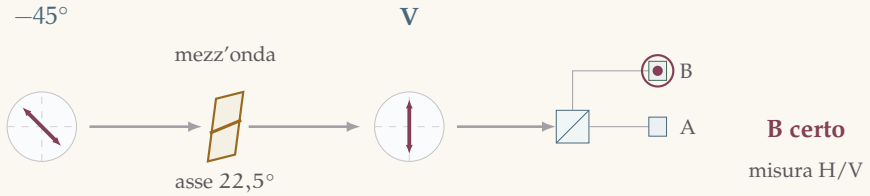


In queste due prove la misura avviene prima della seconda mezz'onda delle sequenze complete.

Nuove preparazioni per ciascuna prova. Modello ideale. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Optics*, lezione 22, pp. 1–5.

Due quarti d’onda: l’analisi finale

Due quarti d’onda allineati avevano trasformato $+45°$ in $-45°$, passando attraverso la circolare. Analizziamo ora l’uscita con una mezz’onda a 22,5°. La polarizzazione diventa V e il rivelatore B registra l’esito con certezza.



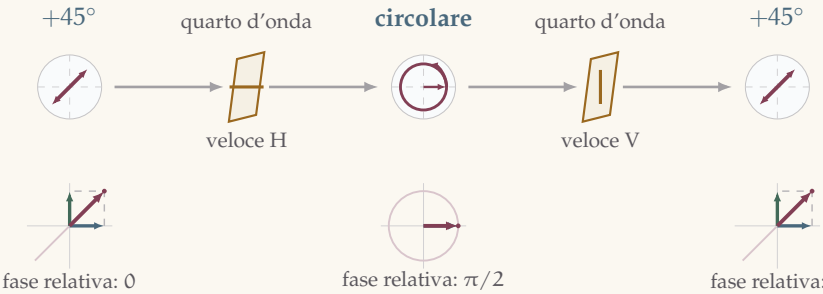
Applichiamo la stessa analisi finale all’uscita appena preparata.

La lamina trasforma la polarizzazione; il separatore indirizza H verso A e V verso B.

Riprendiamo la composizione dei due ritardi già costruita nella Parte V. Modello ideale. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Optics*, lezione 22, pp. 1–5.

Compensare il ritardo

Ruotiamo di 90° il secondo quarto d'onda. L'asse lento della prima lamina coincide ora con quello veloce della seconda. Le componenti accumulano lo stesso ritardo totale e torna la polarizzazione a +45°. Seguiamo prima la compensazione, poi la misura.

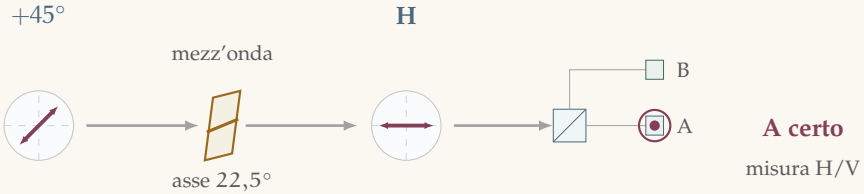


Gli assi veloce e lento vengono scambiati. La fase comune all'uscita conserva la polarizzazione.

Lamine identiche, con assi veloce e lento scambiati. Modello ideale. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Optics*, lezione 22, pp. 1–5.

La lettura dopo la compensazione

La coppia di quarti d'onda con assi scambiati restituisce +45°. La stessa mezz'onda finale a 22,5° porta ora in H. Il risultato è A certo. Rispetto alla sequenza dei quarti allineati, abbiamo cambiato soltanto l'orientazione della seconda lamina.



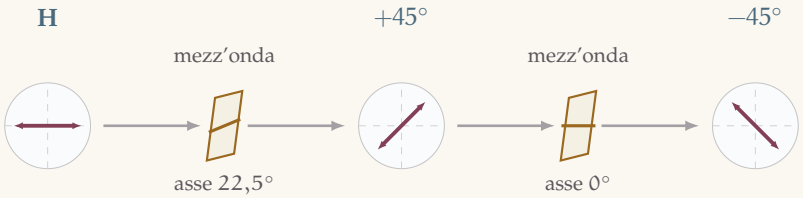
Applichiamo la stessa analisi finale all'uscita appena preparata.

La lamina trasforma la polarizzazione; il separatore indirizza H verso A e V verso B.

Preparazione, lamina di analisi e misura sono mantenute fisse nel confronto. Modello ideale. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Optics*, lezione 22, pp. 1–5.

Prima orientare, poi cambiare la fase

Una mezz'onda a 22,5° trasforma l'ingresso H in +45°. Segue una mezz'onda con assi H/V, che cambia il segno relativo delle componenti. L'uscita è −45°. Conserviamo questa sequenza per confrontarla con l'ordine inverso.



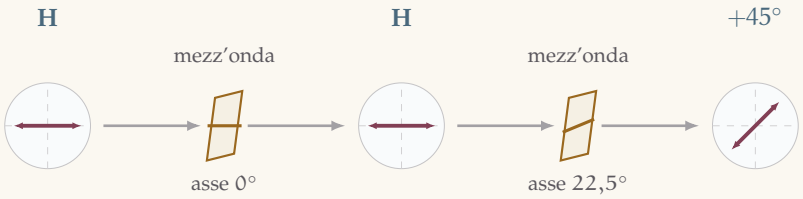
La prima lamina prepara la diagonale; la seconda ne cambia il segno relativo.

Stessa preparazione H e stesse due lamine. Gli angoli indicano l'orientazione dell'asse veloce rispetto a H.

Lamine ideali alla lunghezza d'onda di progetto. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Half-wave Plate*.

Prima cambiare la fase, poi orientare

Scambiamo le due lamine mantenendo l'ingresso H. La mezz'onda con assi H/V conserva la direzione della polarizzazione. La lamina a 22,5°, posta per seconda, produce quindi +45°. L'ordine delle operazioni ha modificato lo stato in uscita.



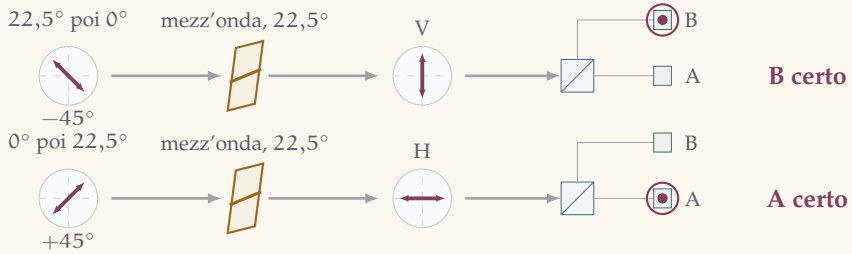
La prima lamina conserva H; la seconda prepara la diagonale.

Stessa preparazione H e stesse due lamine. Gli angoli indicano l'orientazione dell'asse veloce rispetto a H.

La direzione iniziale H coincide con un asse della prima lamina. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Half-wave Plate*.

L’ordine delle lamine e il risultato

Le due sequenze producono diagonali opposte. Applichiamo a entrambe la stessa mezz’onda a 22,5° e misuriamo H/V: un ordine porta a B, l’altro ad A. Per prevedere il risultato, il simulatore deve applicare le trasformazioni nella successione fisica corretta.

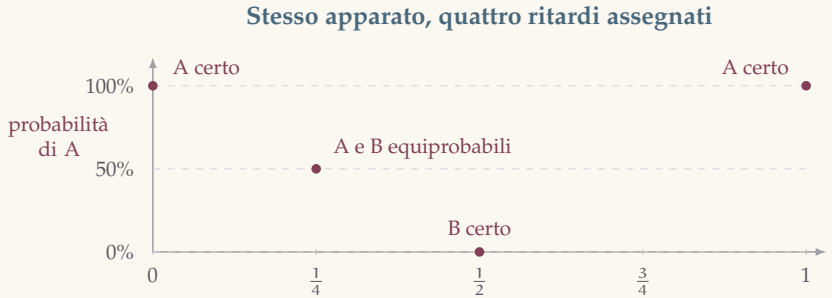


Confrontiamo le uscite dei due ordini precedenti mediante la stessa lamina finale e gli stessi rivelatori.

Le etichette a sinistra ricordano l'ordine delle prime due lamine. Modello ideale. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Optics*, lezione 22, pp. 1–5.

Quattro ritardi nello stesso apparato

Raccogliamo i risultati delle sequenze già studiate. Con ritardo nullo si ottiene A certo; con un quarto di ciclo, esiti equiprobabili; con mezzo ciclo, B certo. Un ciclo intero restituisce la stessa fase relativa iniziale e quindi A certo.



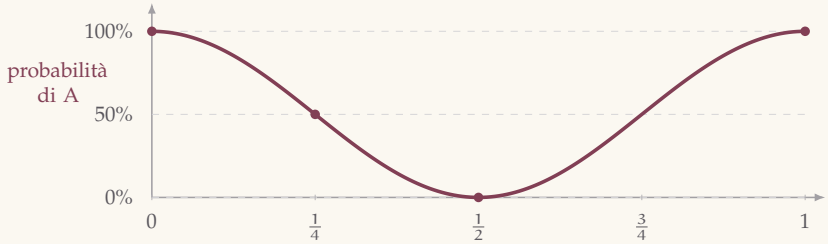
Ritardo in frazioni di ciclo. Le due mezz'onde a 22,5° e la misura H/V restano fisse.

Punti calcolati per il modello ideale. Il ritardo è introdotto fra H e V, nell'operazione intermedia. Modello ideale. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Optics*, lezione 22, pp. 1–5.

Variare il ritardo con continuità

Regoliamo il ritardo intermedio con continuità. Le probabilità passano gradualmente attraverso i valori già incontrati. La curva descrive la risposta dell'apparato per ogni fase relativa: il simulatore deve riprodurre l'intero andamento, oltre ai casi particolari.

$$P(A) = \cos^2(\delta/2) \qquad P(B) = 1 - P(A)$$



Ritardo in frazioni di ciclo. Le due mezz'onde a 22,5° e la misura H/V restano fisse.

La fase δ è espressa in radianti nella formula; l'asse orizzontale usa frazioni di ciclo. Modello ideale. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Optics*, lezione 22, pp. 1–5.

Due sorgenti con preparazioni differenti

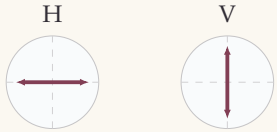
La prima sorgente prepara sempre la stessa polarizzazione circolare. La seconda sceglie casualmente H oppure V, con uguale probabilità. Per confrontarle, ripetiamo ciascuna procedura di preparazione e sottoponiamo le due sorgenti alle stesse misure.

Sempre la stessa circolare



stessa relazione di fase a ogni prova

Scelta casuale fra H e V



probabilità 50% probabilità 50%

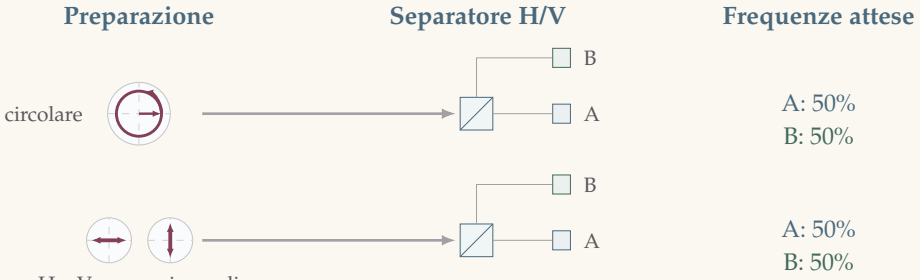
un nuovo sorteggio per ogni preparazione

La circolare è ottenuta da $+45°$ con un quarto d'onda veloce H. Le sorgenti preparano nuove copie.

La scelta casuale indica preparazioni alternative, ciascuna con il proprio peso. Modello ideale. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Optics*, lezione 22, pp. 1–5.

La lettura diretta delle due sorgenti

La circolare ha componenti H e V di uguale modulo, quindi produce esiti equiprobabili. Anche il sorteggio fra H e V dà metà degli eventi in ciascuna uscita. I conteggi della misura diretta lasciano indistinte le due procedure di preparazione.

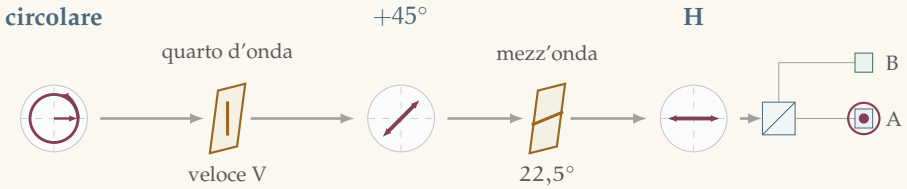


La stessa distribuzione H/V è compatibile con entrambe le sorgenti. Ogni riga usa preparazioni ripetute.

Le percentuali sono probabilità del modello, stimate ripetendo la preparazione. Modello ideale. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Optics*, lezione 22, pp. 1–5.

Analizzare la preparazione circolare

Introduciamo un quarto d’onda con asse veloce V, seguito dalla mezz’onda a 22,5°. La prima lamina compensa il ritardo che aveva preparato la circolare e restituisce +45°. La seconda porta in H: il risultato è A certo.



Il quarto d’onda compensa il ritardo di preparazione.
La mezz’onda finale trasforma la diagonale in H.

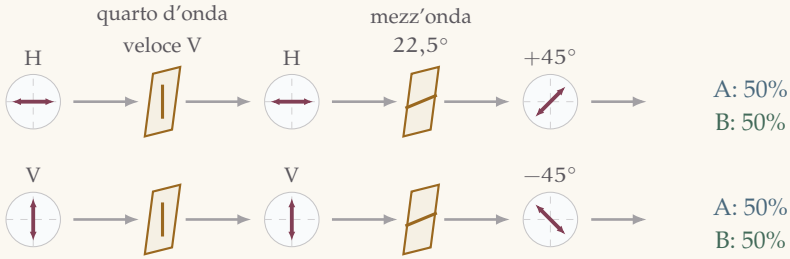
A certo

L’asse veloce del quarto d’onda di analisi è V, per compensare il quarto d’onda veloce H della preparazione.

Preparazione circolare definita nella Parte V. Lamine e misura ideali. Modello ideale. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Optics*, lezione 22, pp. 1–5.

Analizzare la scelta casuale H/V

Applichiamo la stessa analisi agli ingressi H e V, seguendoli separatamente. Il quarto d'onda conserva le loro direzioni; la mezz'onda produce le due diagonali. Ciascuna dà esiti equiprobabili. Mediando i due casi con pesi uguali, il risultato resta 50/50.



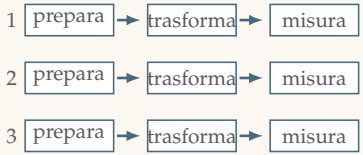
La media delle due righe, con pesi uguali, resta 50/50. La circolare della slide precedente dava A certo.

La risposta alla sequenza distingue le sorgenti: A certo per la circolare, 50/50 per la scelta casuale. Modello ideale. Riferimento: MIT OpenCourseWare, *Optics*, lezione 22, pp. 1–5.

Una misura per ogni esecuzione

Gli stati intermedi calcolati dal simulatore descrivono l'evoluzione del modello. Nel dispositivo la misura finale restituisce un esito. Per stimare le probabilità ripetiamo la preparazione e l'intera procedura; inserire una misura intermedia cambia l'esperimento e richiede un confronto distinto.

La sequenza viene ripetuta per intero



Il programma conserva gli esiti

prova	esito
1	A
2	B
3	A

ogni riga proviene da una nuova preparazione

Tre ripetizioni illustrative. I dati dello stato nel simulatore e il registro delle misure fisiche hanno significati diversi.

IBM Quantum Learning, sistemi composti; Mermin, cap. 1.

Interferenza e progetto del calcolo

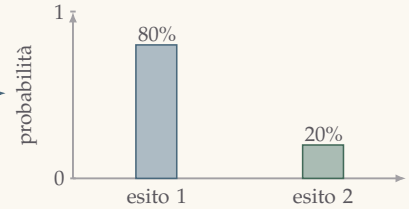
La procedura appena studiata distingue due cambiamenti di fase attraverso l'esito finale. Per costruire un algoritmo occorre collegare una proprietà dell'ingresso a una trasformazione e indicare quali risorse vengono usate. Il modulo sviluppa questa idea con piccoli esempi; il progetto conclusivo verifica due modelli di sorgente.

Una proprietà del problema

scelta delle trasformazioni

operazioni in un ordine assegnato

Una distribuzione informativa



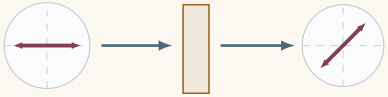
Distribuzione illustrativa: i pesi dipendono dalla procedura. L'esempio qualitativo descrive il criterio di progetto, non uno speedup dimostrato.

Mermin, cap. 1. Portata introduttiva del modulo; confronto delle risorse per problema dichiarato.

Dall'operazione fisica al passo del programma

La trasformazione della lamina ha un corrispondente aggiornamento delle ampiezze nel simulatore. Partendo da H, la mezz'onda a 22,5° produce due contributi uguali e in fase. Il programma conserva questi valori per calcolare le operazioni successive e le probabilità della misura.

Operazione sull'apparato



mezz'onda con asse a 22,5°

Aggiornamento nel simulatore

dato	prima	dopo
a_H	1	$1/\sqrt{2}$
a_V	0	$1/\sqrt{2}$

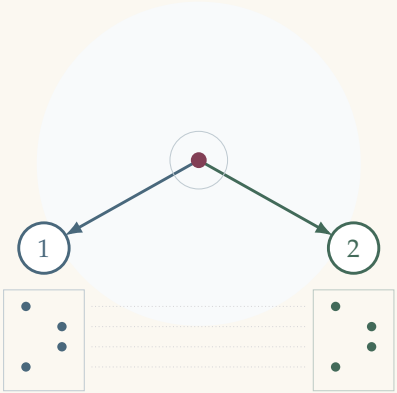
i dati permettono di
calcolare la lettura successiva

Dati interni di una simulazione classica del qubit.
L'apparato esegue la trasformazione sul sistema fisico.

Feynman, *Lectures on Physics*, I, cap. 33. Ottica ideale.

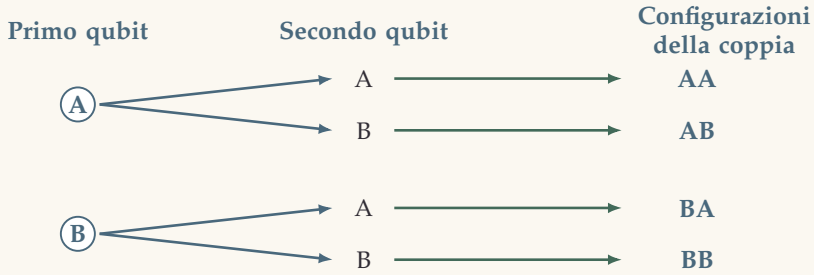
PARTE VII

Due qubit e stati congiunti



Due qubit nello stesso esperimento

Una lettura della coppia restituisce due esiti ordinati. Le possibilità di riferimento sono AA, AB, BA e BB. La prima lettera appartiene al primo sistema, la seconda al secondo. Il modello deve prevedere sia le frequenze individuali sia le associazioni fra i risultati.



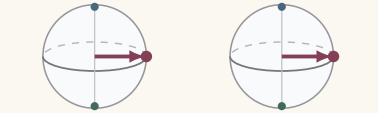
Il grafo enumera le configurazioni di riferimento; i suoi archi non rappresentano misure intermedie o traiettorie fisiche.

IBM Quantum Learning, sistemi composti; Mermin, cap. 1.

Due qubit preparati indipendentemente

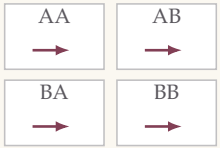
Quando le preparazioni sono pure e indipendenti, le ampiezze della coppia si ottengono moltiplicando quelle dei singoli qubit. Nel caso mostrato, ciascun sistema ha due contributi uguali e in fase. Le quattro configurazioni hanno quindi ampiezza $1/2$ e probabilità $1/4$.

Due preparazioni indipendenti



$a_A = a_B = 1/\sqrt{2}\, b_A = b_B = 1/\sqrt{2}$

Le quattro ampiezze risultanti



ogni prodotto vale $1/2$

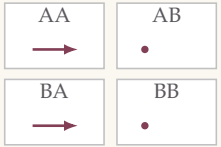
Le quattro frecce sono ampiezze; i loro moduli al quadrato sommano a uno. La regola di prodotto usa l'indipendenza della preparazione.

IBM Quantum Learning, sistemi composti; Mermin, cap. 1.

Un'interazione può creare una relazione fra i due sistemi

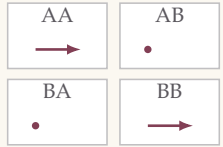
Prepariamo il primo qubit con ampiezze A e B uguali e in fase, e il secondo in A. La coppia ha quindi i contributi AA e BA. La porta lascia invariato AA e scambia A con B sul secondo qubit quando il primo è B: BA diventa BB. Le ampiezze conservano modulo e fase, preparando la sovrapposizione AA/BB.

Preparazione prima dell'interazione



Primo qubit: A/B bilanciati; secondo: A.
AA e BA hanno ampiezza $1/\sqrt{2}$.

Ampiezze della coppia dopo la sequenza



AA e BB hanno ampiezza $1/\sqrt{2}$.
La lettura A/B produce esiti concordi.

Le frecce indicano ampiezze della stessa preparazione; i punti indicano ampiezze nulle. Si applica una porta ideale, prima della misura.

IBM Quantum Learning, sistemi composti: prodotti, stati di Bell e porta controllata.

Statistiche da preparazioni ripetute

Prepariamo una nuova coppia a ogni prova e registriamo insieme i due esiti. La riga evidenziata indica la coppia appena acquisita e la casella che viene incrementata. Al termine, la somma delle caselle coincide con il numero delle prove.

Registro: una coppia per prova

prova	sistema 1	sistema 2
1	A	A
2	–	–
3	–	–
4	–	–
5	–	–
6	–	–
7	–	–
8	–	–

una riga aggiorna una sola casella

Conteggi delle stesse prove

sistema 1 \ sistema 2	A	B
A	1	0
B	0	0

totale: 1 prove

La tabella è calcolata dal registro mostrato. I numeri sono conteggi di eventi, prima della normalizzazione.

Otto prove illustrative conservate dalla sequenza precedente; stessa preparazione e stessa lettura A/B.

Statistiche da preparazioni ripetute

Prepariamo una nuova coppia a ogni prova e registriamo insieme i due esiti. La riga evidenziata indica la coppia appena acquisita e la casella che viene incrementata. Al termine, la somma delle caselle coincide con il numero delle prove.

Registro: una coppia per prova

prova	sistema 1	sistema 2
1	A	A
2	B	B
3	–	–
4	–	–
5	–	–
6	–	–
7	–	–
8	–	–

una riga aggiorna una sola casella

Conteggi delle stesse prove

sistema 1 \ sistema 2	A	B
A	1	0
B	0	1

totale: 2 prove

La tabella è calcolata dal registro mostrato. I numeri sono conteggi di eventi, prima della normalizzazione.

Otto prove illustrative conservate dalla sequenza precedente; stessa preparazione e stessa lettura A/B.

Statistiche da preparazioni ripetute

Prepariamo una nuova coppia a ogni prova e registriamo insieme i due esiti. La riga evidenziata indica la coppia appena acquisita e la casella che viene incrementata. Al termine, la somma delle caselle coincide con il numero delle prove.

Registro: una coppia per prova

prova	sistema 1	sistema 2
1	A	A
2	B	B
3	A	A
4	–	–
5	–	–
6	–	–
7	–	–
8	–	–

una riga aggiorna una sola casella

Conteggi delle stesse prove

sistema 1 \ sistema 2	A	B
A	2	0
B	0	1

totale: 3 prove

La tabella è calcolata dal registro mostrato. I numeri sono conteggi di eventi, prima della normalizzazione.

Otto prove illustrative conservate dalla sequenza precedente; stessa preparazione e stessa lettura A/B.

Statistiche da preparazioni ripetute

Prepariamo una nuova coppia a ogni prova e registriamo insieme i due esiti. La riga evidenziata indica la coppia appena acquisita e la casella che viene incrementata. Al termine, la somma delle caselle coincide con il numero delle prove.

Registro: una coppia per prova

prova	sistema 1	sistema 2
1	A	A
2	B	B
3	A	A
4	B	B
5	B	B
6	A	A
7	A	A
8	B	B

Conteggi delle stesse prove

sistema 1 \ sistema 2	A	B
A	4	0
B	0	4

totale: 8 prove

La tabella è calcolata dal registro mostrato. I numeri sono conteggi di eventi, prima della normalizzazione.

Otto prove illustrative conservate dalla sequenza precedente; stessa preparazione e stessa lettura A/B.

Dalle coppie alle frequenze individuali

Il registro contiene quattro AA e quattro BB. Per il primo sistema sommiamo per righe, per il secondo per colonne. Le due operazioni danno quattro A e quattro B ciascuna. Dividendo per otto otteniamo le frequenze individuali del 50%; la tabella conserva anche quali esiti compaiono insieme.

Le stesse otto coppie

sistema 1 \ sistema 2	A	B
A	4	0
B	0	4

Due modi di sommare la tabella

Sistema 1: somme per righe
$\mathrm{A} : 4 + 0 = 4, \quad \mathrm{B} : 0 + 4 = 4$

Sistema 2: somme per colonne
$\mathrm{A} : 4 + 0 = 4, \quad \mathrm{B} : 0 + 4 = 4$

$4/8 = 50\%$ per ciascun esito

Ogni prova contribuisce una volta al conteggio locale. Le associazioni restano nella tabella congiunta.

Conteggi dello stesso registro illustrativo; nessun nuovo campione.

Stessi conteggi, associazioni diverse

Confrontiamo due registri illustrativi. Ciascun sistema dà due A e due B in entrambi i registri. Le linee mostrano quali risultati appartengono alla stessa prova: questa associazione distingue coppie concordi e discordi, pur lasciando uguali i conteggi individuali.

Registro 1: coppie concordi



Registro 2: coppie discordi



Quattro prove per registro. Ogni segmento unisce i risultati della stessa prova; i totali separati sono identici.

Esempio statistico: le sole correlazioni in una lettura non stabiliscono se la preparazione sia entangled.

Stessi conteggi individuali, coppie diverse

Ciascun sistema dà A e B con probabilità del 50%. Possiamo ricavare da questi dati la probabilità di AA, AB, BA e BB?

Conteggi individuali

Contiamo A e B separatamente per ciascun sistema, senza conservare quali esiti appartengono alla stessa prova.

Coppie della stessa prova

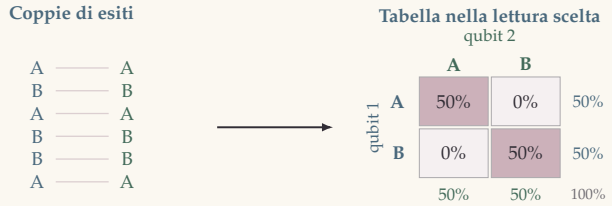
Registriamo insieme i due risultati di ogni prova e costruiamo la tabella delle quattro coppie possibili.

Confrontiamo una tabella con soli AA e BB e una con soli AB e BA, in parti uguali.

Riscontro commentato: confronto fra coppie concordi e discordi.

Correlazione perfetta nella lettura scelta

L'associazione riga per riga mostra soltanto AA e BB. I risultati di ciascun sistema sono distribuiti in parti uguali fra A e B; le coppie sono sempre concordi nella lettura scelta.



Le coppie a sinistra illustrano gli esiti ammessi; la tabella indica la distribuzione prevista in questa lettura.

Osservazione

Gli esiti individuali restano imprevedibili; la relazione fra i due esiti è determinata dalla preparazione.

Anticorrelazione perfetta

Una preparazione diversa può produrre soltanto coppie AB e BA. Anche in questo caso i conteggi individuali restano 50/50, ma le coppie sono sempre discordi.

Coppie di esiti

A	B
B	A
A	B
B	A
B	A
A	B

Tabella nella lettura scelta

qubit 2

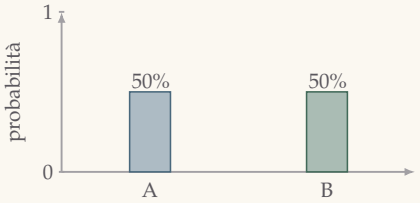
qubit 1	A	B	
A	0%	50%	50%
B	50%	0%	50%
	50%	50%	100%

Le coppie a sinistra illustrano gli esiti ammessi; la tabella indica la distribuzione prevista in questa lettura.

Correlazioni e preparazione della coppia

I conteggi separati possono essere identici anche quando le coppie si associano in modi diversi. Il registro congiunto conserva questa informazione. Una sorgente che sceglie casualmente coppie già definite può produrre correlazioni: per caratterizzare una sovrapposizione occorre confrontare anche altre letture.

Conteggi individuali uguali



Associazioni differenti

coppie concordi

AA BB AA BB

AB BA AB BA

coppie discordi

Registri illustrativi: entrambe le famiglie danno 50% A e 50% B per ciascun sistema. La correlazione da sola non identifica l'entanglement.

IBM Quantum Learning, sistemi composti; Mermin, cap. 1.

Scelta casuale e sovrapposizione

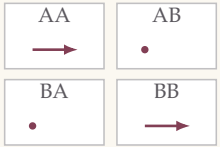
Confrontiamo due sorgenti. La prima sceglie AA oppure BB con uguale probabilità. La seconda prepara contributi AA e BB con ampiezze uguali e fase relativa nulla. Nella lettura diretta le frequenze coincidono; la fase conservata nella seconda preparazione può essere osservata attraverso una diversa analisi.

Scelta casuale della sorgente

AA	peso 1/2
BB	peso 1/2

pesi di due preparazioni distinte

Una preparazione coerente della coppia



ampiezze della stessa preparazione

A sinistra probabilità di una scelta; a destra ampiezze. La somiglianza della prima tabella di esiti lascia aperta la distinzione fra le sorgenti.

IBM Quantum Learning, sistemi composti; Mermin, cap. 1.

Una seconda misura distingue le sorgenti

Calcoliamo la casella AA dopo la stessa ricombinazione su entrambi i qubit. Nella preparazione coerente le due ampiezze, in fase, si sommano e danno probabilità 1/2. Nella scelta casuale mediamo le probabilità delle due preparazioni, ottenendo 1/4. Usiamo pesi uguali e nuove coppie per ogni prova.

Sorgente coerente: casella AA

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\longrightarrow$ stesso esito, stessa fase

$\longrightarrow$

$$P(AA) = |1/\sqrt{2}|^2 = 1/2$$

Scelta casuale: casella AA

$$P(AA \mid AA) = 1/4$$
$$P(AA \mid BB) = 1/4$$

$$P(AA) = \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

prove differenti: si mediano probabilità

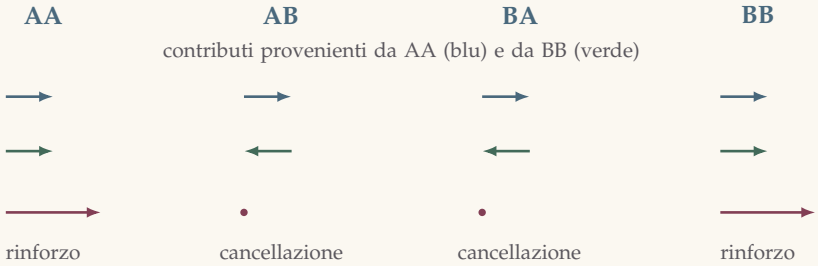
Stessa ricombinazione su entrambi i qubit. Pesi iniziali uguali. Nuove coppie per ogni prova. La pagina successiva estende il calcolo alle quattro caselle.

Confronto ideale. Coerente: si sommano ampiezze verso lo stesso esito. Scelta casuale: si mediano probabilità di preparazioni differenti.

IBM Quantum Learning, sistemi composti.

Le ampiezze della coppia dopo la trasformazione

La ricombinazione distribuisce ciascun contributo iniziale sulle quattro configurazioni. Sommiamo le ampiezze che raggiungono lo stesso esito: per AA e BB si rinforzano, mentre per AB e BA si cancellano. Le due configurazioni rimaste hanno probabilità uguale.



Ogni freccia corta ha modulo $1/(2\sqrt{2})$. Le risultanti non nulle hanno modulo $1/\sqrt{2}$, quindi probabilità $1/2$.

IBM Quantum Learning, sistemi composti; Mermin, cap. 1.

Esplicitare i fattori della ricombinazione

Poniamo $c = 1/\sqrt{2}$. La ricombinazione R trasforma le componenti del singolo qubit:

$$A = (1,0) \longmapsto (c,c),$$
$$B = (0,1) \longmapsto (c,-c).$$

Nella sorgente coerente AA e BB hanno ampiezza iniziale c. Ogni contributo finale moltiplica questa ampiezza e un coefficiente di R per ciascun qubit. Il modulo comune è

$$q = c \cdot c \cdot c = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$





L'ordine delle componenti in uscita è A, B.

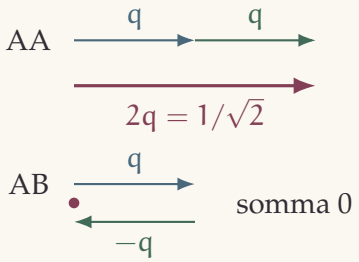
Si usa la stessa R sui due qubit; i tre fattori comprendono la preparazione e le due trasformazioni.

Preparazione coerente: gli esiti AA e AB

L'ingresso, ordinato AA, AB, BA, BB, è $(c, 0, 0, c)$, con $c = 1/\sqrt{2}$. I due contributi danno:

$$\begin{aligned} a'_{AA} &= c\,c\,c + c\,c\,c \\ &= \frac{1+1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ a'_{AB} &= c\,c\,c + c\,c\,(-c) \\ &= \frac{1-1}{2\sqrt{2}} = 0. \end{aligned}$$

Pertanto $P(AA) = (1/\sqrt{2})^2 = 1/2$ e $P(AB) = |0|^2 = 0$.



Blu: ingresso AA; verde: ingresso BB. Frecce di ritorno distanziate per leggibilità.

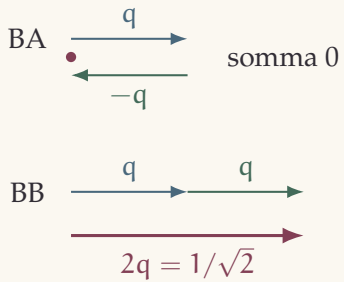
Per AB, il segno meno proviene dal coefficiente che porta il secondo qubit da B a B.

Preparazione coerente: gli esiti BA e BB

Con ingresso $(c, 0, 0, c)$ e $c = 1/\sqrt{2}$, il ramo BA ha un segno meno; BB ne ha due:

$$\begin{aligned} a'_{BA} &= c\,c\,c + c\,(-c)\,c \\ &= \frac{1-1}{2\sqrt{2}} = 0, \\ a'_{BB} &= c\,c\,c + c\,(-c)\,(-c) \\ &= \frac{1+1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Quindi $P(BA) = |0|^2 = 0$ e $P(BB) = (1/\sqrt{2})^2 = 1/2$. La somma è $1/2 + 0 + 0 + 1/2 = 1$.



Blu: AA; verde: BB. I due segni meno danno $(-c)(-c) = c^2$.

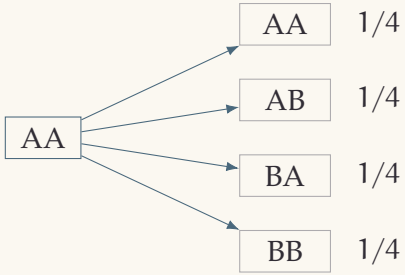
La trasformazione conserva la norma e produce nuovamente ampiezze $(1/\sqrt{2}, 0, 0, 1/\sqrt{2})$.

Scelta casuale: trasformare la preparazione AA

Consideriamo le prove in cui il sorteggio prepara AA, con ampiezza iniziale uno. Ponendo ancora $c = 1/\sqrt{2}$, ciascun qubit A ha uscite (c, c):

$$b_{AA|AA} = 1 \cdot c \cdot c = 1/2,$$
$$b_{AB|AA} = 1 \cdot c \cdot c = 1/2,$$
$$b_{BA|AA} = 1 \cdot c \cdot c = 1/2,$$
$$b_{BB|AA} = 1 \cdot c \cdot c = 1/2.$$

Per ciascuna uscita j, $P(j \mid AA) = |1/2|^2 = 1/4$. La somma condizionata è $4 \cdot 1/4 = 1$.



Probabilità condizionate alla preparazione AA.

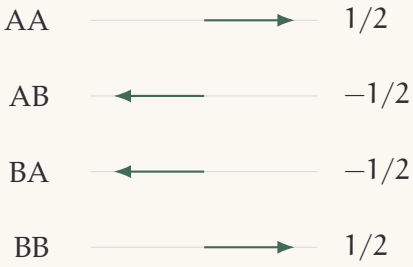
Il primo indice di b indica l'uscita; l'indice dopo la barra indica la preparazione selezionata.

Scelta casuale: trasformare la preparazione BB

Quando il sorteggio prepara BB, l'ampiezza iniziale è uno e ciascun qubit B ha uscite $(c, -c)$, con $c = 1/\sqrt{2}$:

$$b_{AA|BB} = c \cdot c = 1/2,$$
$$b_{AB|BB} = c \cdot (-c) = -1/2,$$
$$b_{BA|BB} = (-c) \cdot c = -1/2,$$
$$b_{BB|BB} = (-c) \cdot (-c) = 1/2.$$

Per AA e BB il quadrato è $(1/2)^2 = 1/4$; per AB e BA è $(-1/2)^2 = 1/4$. Pertanto $P(j \mid BB) = 1/4$ per tutte le uscite e la somma vale uno.



Ampiezze con segno; la scala è uguale nelle quattro righe.

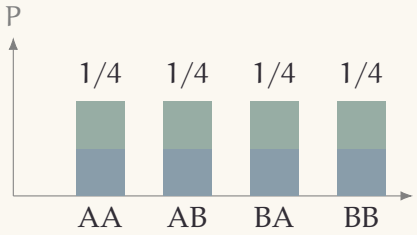
Le fasi modificano i segni delle ampiezze; in questa lettura tutti i moduli sono uguali.

Mediare le quattro probabilità della scelta casuale

Il sorteggio prepara AA o BB con probabilità $1/2$. Le probabilità condizionate appena calcolate sono tutte $1/4$. Per ogni uscita sommiamo i due contributi pesati:

$$\mathrm{P}(\mathrm{AA}) = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4},$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{AB}) = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4},$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{BA}) = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4},$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{BB}) = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4}.$$

Il controllo finale dà $1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 = 1$.



Ogni colonna somma $1/8 + 1/8$. Blu: AA; verde: BB del sorteggio.

La scelta casuale assegna peso $1/4$ a ogni esito; la preparazione coerente assegna $(1/2, 0, 0, 1/2)$.

La composizione di due preparazioni indipendenti

Se ogni sistema è preparato separatamente, il contributo della coppia si ottiene moltiplicando le ampiezze dei due sistemi. Per una diagonale su ciascuno dei due qubit tutte le quattro configurazioni sono presenti.

Primo qubit: $(a, b) = (1, 1)/\sqrt{2}$.
Secondo: $(c, d) = (1, 1)/\sqrt{2}$.

$$(a_{AA}, a_{AB}, a_{BA}, a_{BB}) = (ac, ad, bc, bd) = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2).$$

Ogni probabilità vale $1/4$; la somma è uno.

$ac = 1/2$	$ad = 1/2$
$bc = 1/2$	$bd = 1/2$

Una riga per il primo sistema, una colonna per il secondo.

La tabella è una rappresentazione delle ampiezze congiunte. Le sue caselle appartengono alla stessa preparazione.

Perché la coppia AA/BB richiede uno stato congiunto

Supponiamo di poter ottenere soltanto AA e BB mediante due preparazioni indipendenti. Le ampiezze delle due caselle occupate sono diverse da zero, perciò tutti i fattori che le compongono devono essere diversi da zero.

Da $ac \neq 0$ segue $a \neq 0$ e $c \neq 0$.

Da $bd \neq 0$ segue $b \neq 0$ e $d \neq 0$.

Ma allora anche $ad \neq 0$ e $bc \neq 0$: comparirebbero AB e BA.

La tabella con sole AA e BB non ammette quei fattori.

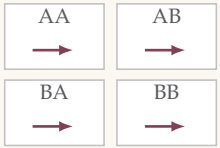
AA $1/\sqrt{2}$	AB 0
BA 0	BB $1/\sqrt{2}$

L'argomento riguarda lo stato puro congiunto. Una scelta casuale fra AA e BB richiede invece una descrizione statistica delle preparazioni.

Entanglement

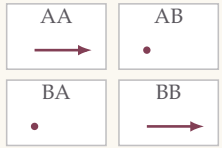
La sovrapposizione pura di AA e BB, con entrambi i contributi presenti, è uno stato *entangled*: le ampiezze congiunte non si ottengono assegnando uno stato puro a ciascun qubit separatamente. La seconda lettura distingue questa preparazione dalla scelta casuale. Le sole correlazioni della prima lettura lasciano aperto il confronto.

Una preparazione pura indipendente



Quattro ampiezze di modulo $1/2$.
Somma dei quadrati: $4\,(1/2)^2 = 1$.

La sovrapposizione AA e BB



Due ampiezze di modulo $1/\sqrt{2}$.
Somma dei quadrati: $2\,(1/\sqrt{2})^2 = 1$.

Scala delle frecce uguale nei due riquadri; fase relativa zero. La lunghezza rappresenta il modulo dell'ampiezza; il suo quadrato fornisce la probabilità.

IBM Quantum Learning, sistemi composti.

Guardare un sistema alla volta

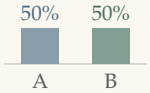
Lo stesso apparato permette di conservare gli esiti associati della coppia oppure quelli del solo primo sistema. Il confronto riunisce le due descrizioni: AA e BB hanno probabilità 1/2, e la somma sugli esiti del secondo dà ancora 1/2 per A e per B. La registrazione congiunta mantiene l'associazione.

La descrizione dell'insieme



Lettura congiunta A/B:
AA oppure BB, ciascuno al 50%.

Lettura del solo primo sistema



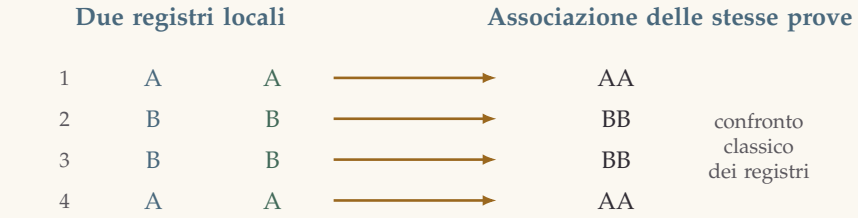
Sommiamo gli esiti del secondo.
A e B sono equiprobabili;
le associazioni appartengono all'insieme.

Stessa preparazione e stessa lettura A/B.

Sovrapposizione bilanciata AA/BB, lettura A/B. IBM Quantum Learning, stati composti e descrizioni locali.

Correlazioni e comunicazione

Ogni osservatore raccoglie risultati locali e non può scegliere l'esito della singola prova. Per riconoscere le correlazioni occorre associare le registrazioni dello stesso esperimento. Questo confronto richiede comunicazione classica; considerando tutti gli esiti, un'operazione locale lascia invariata la distribuzione dell'altro sistema.



Quattro prove illustrative con esiti concordi. Le frecce fra i registri rappresentano il trasferimento classico dei dati.

IBM Quantum Learning, stati composti e osservazioni locali.

Quante ampiezze servono per descrivere un registro?

Ogni qubit raddoppia le configurazioni. Per uno stato puro generale il simulatore conserva 2^n ampiezze complesse, con norma uno e fase globale irrilevante. Stati particolari ammettono descrizioni più compatte. Il vantaggio computazionale richiede un confronto riferito allo specifico problema.

Aggiungere un qubit alle configurazioni



Dimensione della descrizione esplicita

qubit	configurazioni
1	2
2	4
3	8
4	16

n qubit: 2^n ampiezze

una singola misura restituisce una stringa

L'albero enumera configurazioni e non esecuzioni parallele osservabili. Normalizzazione e fase globale impongono vincoli alle ampiezze.

IBM Quantum Learning, sistemi composti.

La struttura dello stato può ridurre i dati

Se i qubit sono preparati indipendentemente, la lista delle ampiezze locali determina tutti i prodotti della descrizione completa. Una preparazione generale può richiedere dati direttamente associati alle configurazioni congiunte. Il costo della simulazione dipende quindi anche dalla struttura dello stato e dalle operazioni applicate.

Quattro qubit indipendenti

1	a_A	a_B
2	a_A	a_B
3	a_A	a_B
4	a_A	a_B

due ampiezze per ogni stato locale

Una descrizione generale a quattro qubit

0000	0001	0010	0011
0100	0101	0110	0111
1000	1001	1010	1011
1100	1101	1110	1111

16 ampiezze, una per configurazione

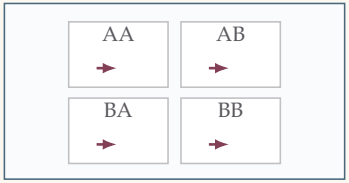
A=0 e B=1. Confronto fra due rappresentazioni esplicite, a precisione fissata; nessuna soglia universale di simulabilità è implicata.

IBM Quantum Learning, sistemi composti; Mermin, cap. 1.

Simulatore classico e dispositivo quantistico

Il simulatore classico conserva una rappresentazione numerica dello stato e può ispezionarla durante il calcolo. Nel dispositivo, le operazioni agiscono sul registro fisico e una misura restituisce una stringa. Le probabilità vengono stimate ripetendo la preparazione e la sequenza di operazioni.

Computer che simula lo stato



valori interni ispezionabili e archiviabili

Registro fisico controllato



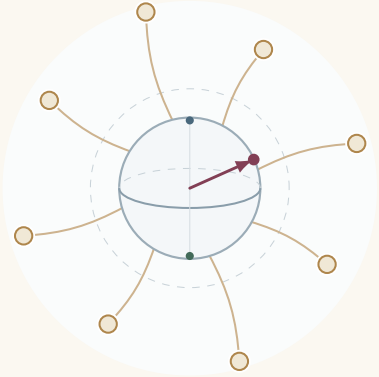
una stringa per misura

Due modi di eseguire la stessa descrizione operativa. Il costo della simulazione e le risorse del dispositivo richiedono valutazioni separate.

IBM Quantum Learning, sistemi composti; Mermin, cap. 1.

PARTE VIII

Ambiente e perdita di interferenza



Un qubit a contatto con l'ambiente

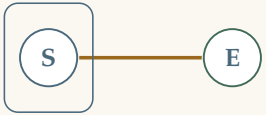
Riprendiamo la descrizione di due sistemi, limitando l'osservazione al primo. Il secondo rappresenta inizialmente un ambiente minimo a due stati. L'interazione può lasciare in esso tracce delle alternative del qubit e modificare le statistiche accessibili alla lettura locale.

Due sistemi controllati



preparazione e lettura della coppia

Un solo sistema osservato



E è trattato come ambiente

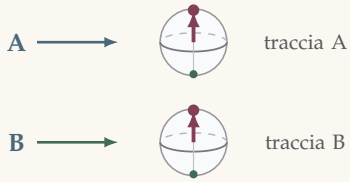
S = sistema; E = ambiente minimo. La cornice indica quali parti sono osservate; il segmento rappresenta l'interazione.

IBM Quantum Learning, stati composti e osservazioni locali.

Tracce uguali nell'ambiente

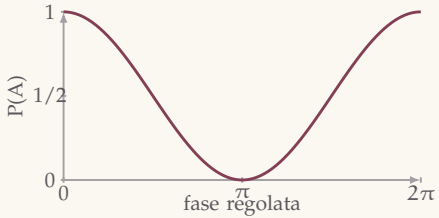
Se le due alternative lasciano lo stesso stato nell'ambiente, questo non contiene un'informazione di cammino. La ricombinazione può conservare tutto il contrasto della preparazione iniziale. Il profilo viene verificato variando la fase fra le prove e osservando sempre la stessa uscita.

Tracce delle alternative nell'ambiente



stati ambientali uguali

Probabilità dopo la ricombinazione



Ambiente minimo a due stati e qubit iniziale bilanciato. Le piccole sfere mostrano stati uguali; il contrasto ideale vale uno.

IBM Quantum Learning, stati composti e osservazioni locali.

Le due tracce ambientali

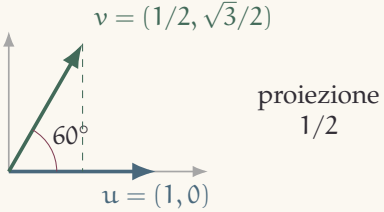
La preparazione del qubit è bilanciata e ha fase relativa zero. Le due alternative A e B sono associate a

$$u = (1, 0), \qquad v = (1/2, \sqrt{3}/2).$$

Le tracce sono normalizzate:

$$\|u\|^2 = 1^2 + 0^2 = 1,$$

$$\|v\|^2 = \frac{1^2}{2^2} + \frac{(\sqrt{3})^2}{2^2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$



Vettori nel piano reale delle ampiezze ambientali.

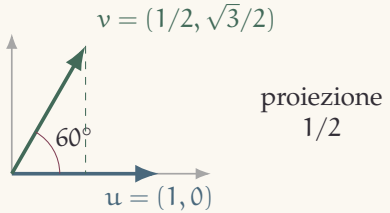
Le coordinate rappresentano ampiezze delle due alternative ambientali.

Il prodotto interno delle tracce ambientali

Per le tracce reali $u = (1, 0)$, $v = (1/2, \sqrt{3}/2)$, il prodotto interno è

$$\gamma = u \cdot v = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

Poiché entrambe hanno norma uno, questo valore è il coseno del loro angolo: $\cos 60° = 1/2$. La figura rappresenta quel piano di ampiezze.



Vettori nel piano reale delle ampiezze ambientali.

Le coordinate rappresentano ampiezze delle due alternative ambientali.

I contributi ambientali alla ricombinazione

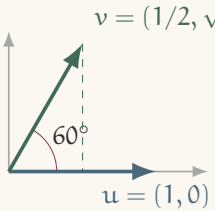
Riprendiamo $u = (1, 0)$, $v = (1/2, \sqrt{3}/2)$ e le due ampiezze iniziali $1/\sqrt{2}$, con fase zero. La ricombinazione somma per A e sottrae per B; introduce un secondo fattore $1/\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

I vettori ambientali alle due uscite sono quindi

$$w_A = \frac{u+v}{2}, \qquad w_B = \frac{u-v}{2}.$$

Calcoliamo le componenti prima di sommare le probabilità delle alternative ambientali.



proiezione 1/2

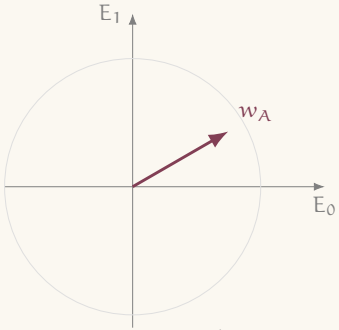
Vettori nel piano reale delle ampiezze ambientali.

Per ciascuna alternativa ambientale si sommano le ampiezze dei cammini; fra alternative ortogonali si sommano le probabilità.

L'uscita A con entrambe le alternative ambientali

Con $u = (1, 0)$ e $v = (1/2, \sqrt{3}/2)$, l'uscita A ha vettore

$$w_A = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}, 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$



Ampiezze ambientali: assi E_0, E_1.

Ogni componente viene calcolata prima di applicare la regola del modulo quadro.

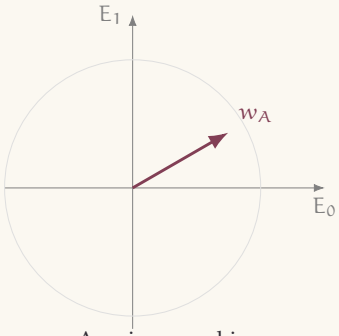
Le probabilità congiunte e locali: uscita A

Le ampiezze dell'uscita A sono $w_A = (3/4, \sqrt{3}/4)$.
Le due probabilità congiunte sono

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}, \qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}.$$

Ignorando l'alternativa ambientale:

$$P(A) = \frac{9}{16} + \frac{3}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$



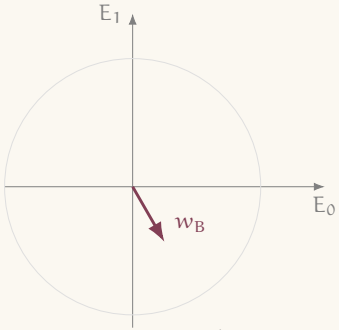
Ampiezze ambientali: assi E_0, E_1.

Si sommano le probabilità delle due alternative ambientali ortogonali.

L'uscita B con entrambe le alternative ambientali

Manteniamo $u = (1, 0)$ e $v = (1/2, \sqrt{3}/2)$. L'uscita B ha vettore

$$w_B = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}, 0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$



Ampiezze ambientali: assi E_0, E_1.

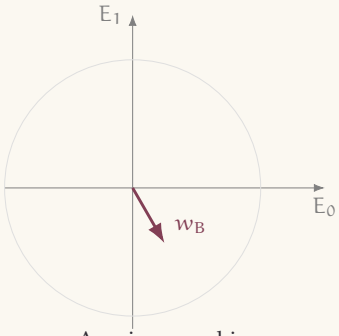
Ogni componente viene calcolata prima di applicare la regola del modulo quadro.

Le probabilità congiunte e locali: uscita B

Le ampiezze dell'uscita B sono $w_B = (1/4, -\sqrt{3}/4)$.
Le due probabilità congiunte sono

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}, \qquad \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}.$$

Quindi $P(B) = 1/16 + 3/16 = 4/16 = 1/4$ e
$P(A) + P(B) = 3/4 + 1/4 = 1$.



Ampiezze ambientali: assi E_0, E_1.

Si sommano le probabilità delle due alternative ambientali ortogonali.

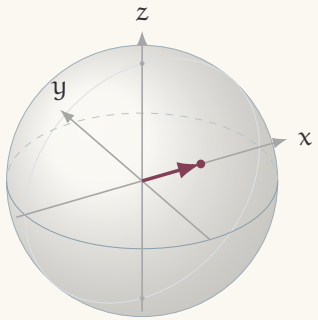
La coordinata locale ricavata dalle probabilità

Nel caso bilanciato a fase zero, la lettura x dà $P(A) = 3/4$ e $P(B) = 1/4$. La coordinata è la loro differenza:

$$r_x = P(A) - P(B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Il bilanciamento e la fase zero danno $r_z = 0$ e $r_y = 0$. Il raggio vale

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = \sqrt{1/4} = 1/2.$$



Coordinate locali $(1/2, 0, 0)$.

Nel modulo 2 ricaveremo le stesse coordinate dalla matrice ridotta.

Tracce in parte diverse

Consideriamo un qubit inizialmente bilanciato e due stati ambientali puri la cui sovrapposizione ha modulo $V = 1/2$. Nel modello ideale $P(A \mid \varphi) = \frac{1}{2}[1 + V\cos\varphi]$: massimo $3/4$, minimo $1/4$. Il contrasto vale quindi $(3/4 - 1/4)/(3/4 + 1/4) = 1/2$. Le probabilità dei singoli cammini restano uguali; diminuisce il termine di interferenza.

Modello della scansione

$$P(A \mid \varphi) = \frac{1}{2}[1 + V\cos\varphi]$$

$$V = 1/2 \;\Rightarrow\; P_{max} = 3/4, \quad P_{min} = 1/4$$

Contrasto

$$C = \frac{P_{max} - P_{min}}{P_{max} + P_{min}}$$

$$C = \frac{3/4 - 1/4}{3/4 + 1/4} = 1/2$$



V moltiplica l'oscillazione; in questo modello coincide numericamente con il contrasto C.

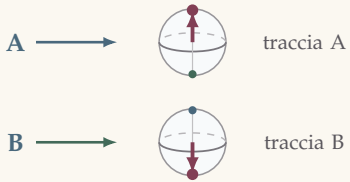
Preparazione iniziale pura e bilanciata; dopo l'interazione lo stato locale del qubit è misto.

IBM Quantum Learning, stati composti e osservazioni locali.

Tracce distinguibili e decoerenza

Nel limite ideale le due tracce ambientali sono *ortogonali*: esiste una misura capace di distinguerle con certezza e la loro sovrapposizione matematica è zero. Il termine di interferenza locale scompare; per questo $P(A) = 1/2$ a ogni fase. L'ortogonalità riguarda gli stati dell'ambiente, non la direzione geometrica dei cammini nel banco.

Tracce delle alternative nell'ambiente



stati ambientali ortogonali

Probabilità dopo la ricombinazione



Tracce ortogonali nel modello ideale: P(A)=1/2 per ogni fase. La descrizione riguarda le statistiche, non la selezione di un singolo esito.

IBM Quantum Learning, stati composti e osservazioni locali.

Descrizione completa e osservazioni sul qubit

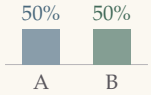
Un ambiente minimo registra due tracce distinguibili, associate ad A e B. Nell'esempio bilanciato, il solo qubit dà 50% e 50% in ogni base. Nella lettura congiunta A/B compaiono AA e BB: il confronto mostra quali informazioni restano nella descrizione dell'insieme.

La descrizione dell'insieme



Lettura congiunta A/B:
AA oppure BB, ciascuno al 50%.

Lettura del solo primo sistema



Sommiamo gli esiti del secondo.
A e B sono equiprobabili;
le associazioni appartengono all'insieme.

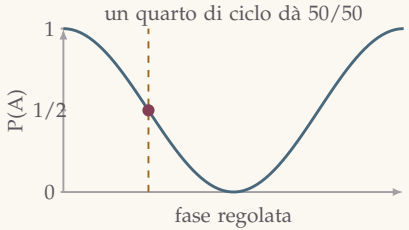
Ambiente minimo a due stati, marcatura completa e preparazione bilanciata.

Modello bilanciato con marcatura completa. Haroche–Raimond, §2.5.

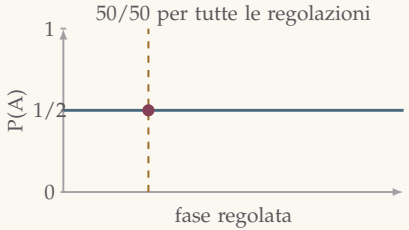
Contrasto delle frange e interazione fisica

Una sola lettura 50/50 può provenire da preparazioni differenti. Con fase fissata a un quarto di ciclo, la curva mantiene pieno contrasto. Dopo una marcatura completa la probabilità resta costante per ogni fase. La scansione dell'apparato permette di distinguere le due situazioni.

Fase fissata: un punto della curva



Perdita di contrasto: l'intera curva



Stessa scala nei due grafici. Un punto della curva non ne determina il contrasto; fluttuazioni di fase richiedono ulteriori controlli sulla causa fisica.

IBM Quantum Learning, stati composti e osservazioni locali.

Non leggere l'ambiente ripristina l'interferenza?

Le alternative A e B hanno lasciato tracce distinguibili nell'ambiente. Quale intervento può far ricomparire le frange nelle misure del solo qubit?

Tracce conservate

Lasciamo invariata l'interazione e rinunciamo soltanto a leggere il risultato registrato nell'ambiente.

Interazione invertita

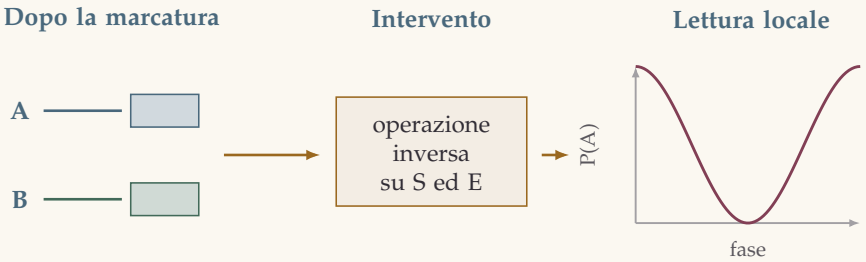
Agiamo sul qubit e sulle parti dell'ambiente coinvolte, applicando l'operazione inversa nel modello ideale.

Distinguiamo la rinuncia a osservare una traccia dalla sua cancellazione fisica.

Riscontro commentato: applicare l'inversa dell'interazione con l'ambiente.

Recupero dell'interferenza

Nel modello ideale l'interazione conserva norme e prodotti scalari, cioè i confronti fra preparazioni: è *unitaria*. Controllando qubit e ambiente possiamo invertirla, riportare l'ambiente alla preparazione iniziale e recuperare il contrasto. Rinunciare a leggere le tracce lascia invece invariata l'interazione.



Inversione unitaria ideale dell'interazione completa. Rendere nuovamente uguali le tracce richiede il controllo congiunto.

IBM Quantum Learning, stati composti e osservazioni locali.

Confrontare due interventi sull'ambiente

Lasciare il registro senza lettura mantiene l'interazione e le tracce già prodotte. Invertire l'accoppiamento modifica invece lo stato congiunto. Confrontiamo le due procedure sullo stesso apparato: soltanto la seconda ripristina, nel modello ideale, la dipendenza dalla fase.

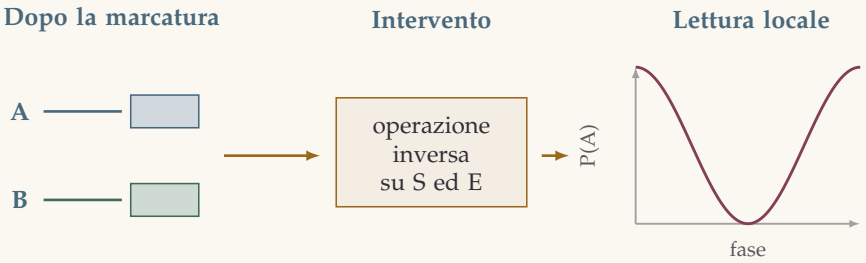


Prima apparizione: registro ignorato. Seconda: inversione su sistema e ambiente. I due grafici usano la stessa scala.

IBM Quantum Learning, stati composti e osservazioni locali.

Confrontare due interventi sull'ambiente

Lasciare il registro senza lettura mantiene l'interazione e le tracce già prodotte. Invertire l'accoppiamento modifica invece lo stato congiunto. Confrontiamo le due procedure sullo stesso apparato: soltanto la seconda ripristina, nel modello ideale, la dipendenza dalla fase.



Prima apparizione: registro ignorato. Seconda: inversione su sistema e ambiente. I due grafici usano la stessa scala.

IBM Quantum Learning, stati composti e osservazioni locali.

Un ambiente esteso

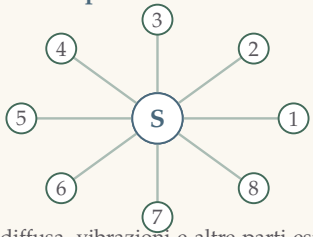
In un apparato reale l'interazione può distribuire le correlazioni su molte parti dell'ambiente. La descrizione completa include questi gradi di libertà. Recuperare la preparazione iniziale richiede però un controllo sufficientemente preciso delle parti coinvolte, che può diventare impraticabile.

Un ambiente minimo



pochi gradi di libertà accessibili

Molte parti dell'ambiente



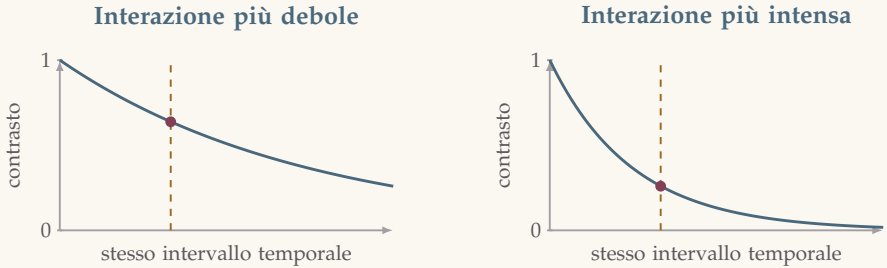
luce diffusa, vibrazioni e altre parti esterne

Nodi: parti dell'ambiente; archi: accoppiamenti schematici. Il grafo non rappresenta una misura simultanea di tutti gli stati.

IBM Quantum Learning, stati composti e osservazioni locali.

La scala temporale della perdita di contrasto

La perdita di contrasto dipende dall'interazione e dalle condizioni dell'ambiente. Confrontiamo due tassi di decadimento sullo stesso intervallo temporale. La figura permette di riconoscere quanto a lungo rimane visibile l'interferenza nel modello scelto, prima di stabilire i tempi utili delle operazioni.

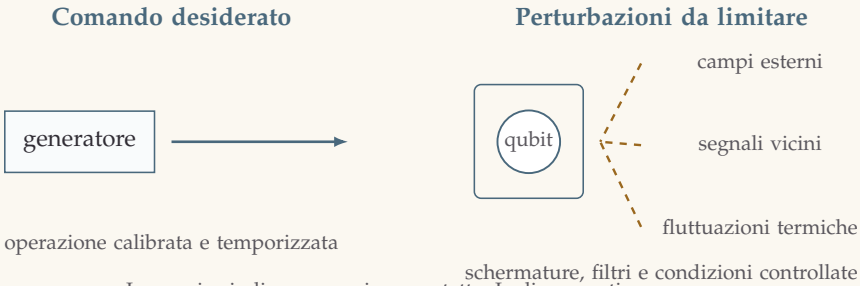


Due decadimenti esponenziali illustrativi, $V(t)=\exp(-\gamma t)$. γ è un tasso, con unità inverse del tempo. Ambienti finiti possono mostrare ritorni.

IBM Quantum Learning, stati composti e osservazioni locali.

Proteggere e controllare il registro

Il registro deve ricevere i comandi utili e limitare gli effetti delle perturbazioni esterne. Schermature, filtri e condizioni termiche controllate riducono gli accoppiamenti indesiderati. Le prove sul dispositivo misurano l'effetto residuo dei disturbi e la precisione delle trasformazioni.



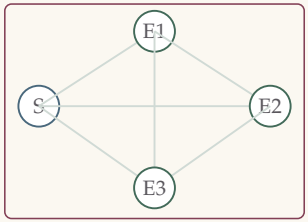
La cornice indica una regione protetta. Le linee continue sono comandi; quelle tratteggiate rappresentano perturbazioni possibili.

IBM Quantum Learning, stati composti e osservazioni locali.

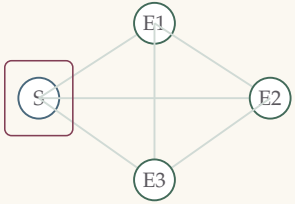
Quali parti seguiamo nel simulatore

Possiamo includere esplicitamente sistema e ambiente oppure calcolare soltanto le previsioni locali del sistema. La scelta modifica i dati conservati e le approssimazioni. Per prevedere un intervento congiunto servono le relazioni fra le parti; per alcune misure locali può bastare una descrizione ridotta.

Seguire esplicitamente tutte le parti



Descrivere gli effetti sul sistema

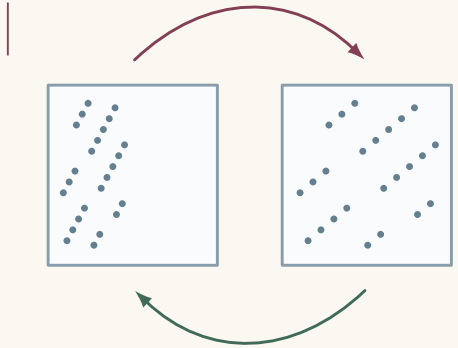


Cornice rossa: parti descritte esplicitamente. Una descrizione locale conserva le previsioni delle misure sul sistema, non tutti i dati congiunti.

IBM Quantum Learning, stati composti e osservazioni locali.

PARTE IX

Informazione e irreversibilità



Le condizioni del ritorno

Riprendiamo i due problemi incontrati: un archivio permette di ricostruire la descrizione numerica, mentre un ritorno fisico richiede comandi sul sistema. Confrontiamo i dati conservati e le operazioni disponibili, tenendo distinti i meccanismi del gas e del qubit correlato all'ambiente.

Ricostruire i dati del modello

archivio	contenuto
stato	x_i, v_i
calcolo	passo e algoritmo
insieme	pesi degli stati

informazioni per riprendere la simulazione

Realizzare il ritorno nell'apparato



comandi su tutte le parti coinvolte

accesso e precisione per invertire il moto

La ricostruzione del modello e il controllo dell'apparato sono compiti diversi. La sufficienza dei dati dipende dal compito scelto.

Halliday–Resnick–Walker, *Fundamentals of Physics*, capp. 2 e 5. Esempi del modello.

Quali informazioni conserva un archivio?

Salviamo soltanto i conteggi del gas per cella oppure le probabilità delle misure sul qubit. Questi dati permettono di ricostruire tutta la descrizione iniziale?

Conteggi e probabilità locali

Conserviamo il numero di particelle nelle celle oppure le previsioni sulle misure del solo qubit.

Tutti i dati del modello

Conserviamo lo stato completo rappresentato nel simulatore, il metodo di calcolo e la precisione numerica.

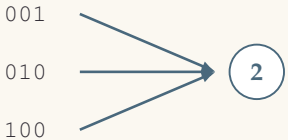
Separiamo tre obiettivi: ricostruire i dettagli, ripetere il calcolo e invertire l'evoluzione fisica.

Riscontro commentato: distinguere archivio numerico e controllo fisico.

Confronto fra le informazioni escluse

Nel gas, il conteggio riunisce posizioni individuali differenti nello stesso valore. Nel qubit, la descrizione locale conserva le previsioni delle misure sul sistema e lascia fuori correlazioni con l'ambiente. Queste riduzioni rispondono a compiti specifici e hanno significati fisici distinti.

Gas: aggregare le posizioni



conteggio comune a configurazioni diverse

Qubit: restringere le osservazioni



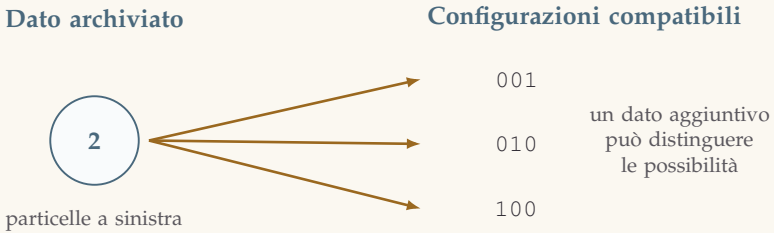
letture accessibili sul solo sistema

Sinistra: mappa molti-a-uno dei dati classici. Destra: restrizione delle osservazioni a un sottosistema.

IBM Quantum Learning, stati composti e osservazioni locali.

Ricostruire da un dato aggregato

Il conteggio salvato ammette più configurazioni iniziali. La ricostruzione deve quindi scegliere fra possibilità che l'archivio non distingue. Conservare ulteriori informazioni, come l'identità delle particelle presenti in ciascuna metà, restringe l'insieme delle configurazioni compatibili.

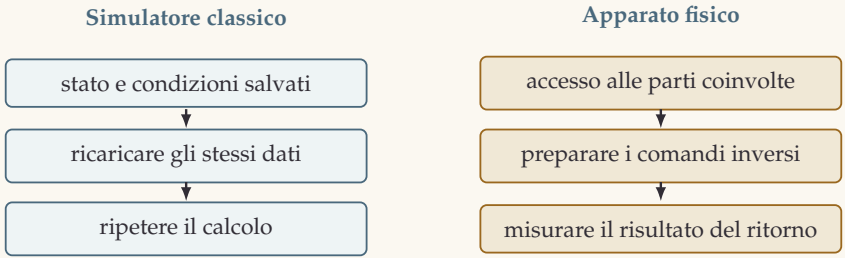


Tre particelle: il dato 2 è compatibile con 001, 010 e 100. Il grafo descrive un'inversione informativa, non l'inversione fisica del moto.

Halliday–Resnick–Walker, cap. 20. Conteggi esatti del modello binario dichiarato.

Riprendere il calcolo e invertire l'apparato

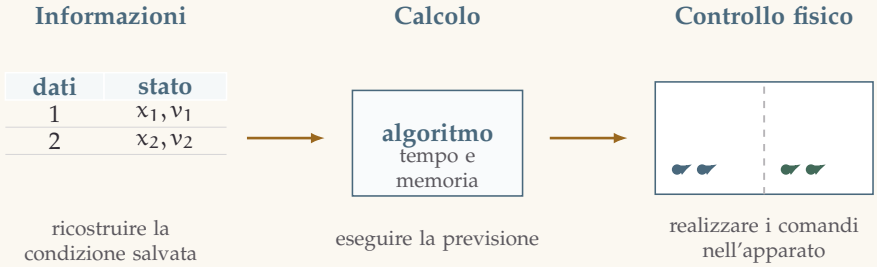
L'archivio conserva dati e condizioni numeriche: il programma può ricaricarli e riprodurre l'esecuzione. Il ritorno fisico richiede i comandi del modello: inversione delle velocità nel gas oppure operazioni congiunte su sistema e ambiente. Il diagramma collega ciascun compito alle informazioni e al controllo necessari.



Gas: controllo delle velocità. Sistema–ambiente: operazioni congiunte. Schema delle procedure già esaminate.

Dati, calcolo e controllo del ritorno

La ricostruzione richiede le informazioni previste dal modello. Il calcolo dispone di memoria e tempo finiti. Un ritorno fisico richiede inoltre l'accesso alle parti coinvolte e comandi accurati. Queste tre condizioni devono essere valutate separatamente per stabilire quali operazioni siano realizzabili.



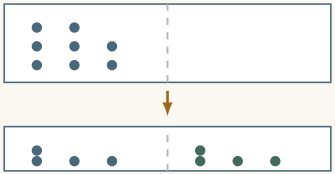
Schema dei tre requisiti. La conservazione di un archivio numerico non realizza da sola un'operazione sul sistema fisico.

Halliday–Resnick–Walker, *Fundamentals of Physics*, capp. 2 e 5. Esempi del modello.

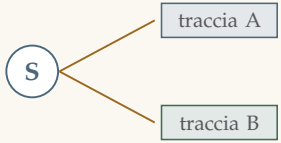
Espansione del gas e perdita di interferenza

Il gas esplora configurazioni sotto una legge del moto, a partire da una preparazione concentrata. Nel qubit l'interazione può rendere distinguibili le alternative nell'ambiente. I meccanismi fisici sono differenti; il confronto riguarda le informazioni e i controlli necessari per ricostruire l'evoluzione.

Gas: preparazione e dinamica



Qubit: correlazioni con l'ambiente



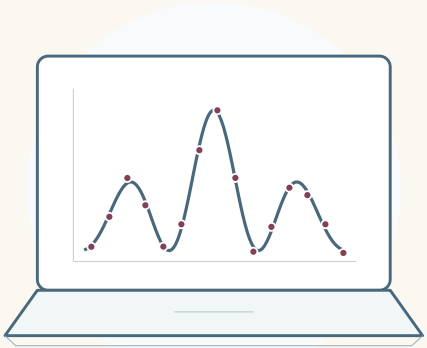
la lettura locale perde il contrasto

Due fenomeni già studiati. Il recupero richiede procedure fisiche specifiche, oltre a una descrizione sufficientemente completa.

IBM Quantum Learning, stati composti e osservazioni locali.

SINTESI

Il progetto di simulazione



Una simulazione da costruire

Il progetto finale riprende le decisioni affrontate negli scenari: rappresentare una preparazione, aggiornare lo stato e calcolare una lettura. Scegliamo prove che distinguano i modelli proposti. La precisione numerica e la provenienza dei risultati usati per il confronto devono essere dichiarate.



Schema del progetto sulla coppia di qubit. Le frecce indicano passi del programma; le barre sono probabilità del modello.

IBM Quantum Learning, sistemi composti; Mermin, cap. 1.

Rappresentazioni dei sistemi classici

Nel moto puntiforme aggiorniamo posizione e velocità. Un insieme di stati descrive la preparazione incerta e permette previsioni statistiche. Per le onde conserviamo valori distribuiti e le grandezze richieste dalla dinamica. Ogni rappresentazione è scelta rispetto al fenomeno e alle osservazioni da prevedere.

Particella	**Insieme**	**Onda**
		
posizione e velocità		valori sulla griglia
una traiettoria	pesi e distribuzione delle traiettorie	campo e sua evoluzione

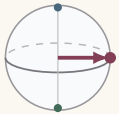
Tre descrizioni del percorso classico. I grafi e le curve rappresentano dati del modello, non lo stesso oggetto fisico.

Halliday–Resnick–Walker, *Fundamentals of Physics*, capp. 2 e 5. Esempi del modello.

Rappresentazioni dei sistemi quantistici

Le ampiezze e le loro fasi consentono di prevedere trasformazioni e misure del qubit. Con due sistemi la descrizione può richiedere ampiezze della coppia. Quando l'accesso è limitato al solo sistema, la rappresentazione deve conservare le previsioni locali pertinenti e dichiarare le parti esterne.

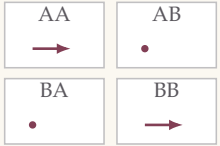
Qubit



due ampiezze

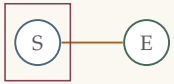
una lettura A/B

Coppia



ampiezze congiunte

Sistema aperto



osservazioni locali

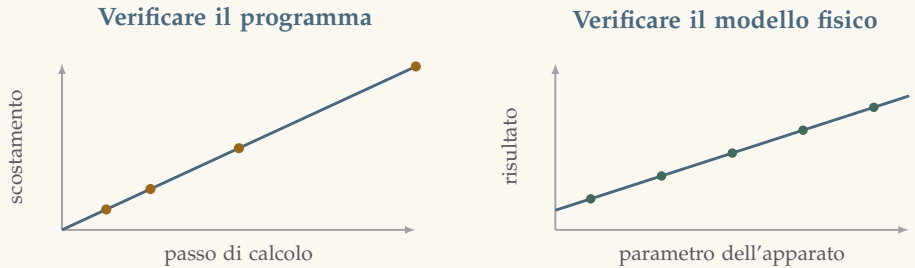
correlazioni esterne

Sfera: mappa dello stato puro di un qubit. Griglia: configurazioni della coppia. Cornice: ambito delle osservazioni locali.

IBM Quantum Learning, stati composti e osservazioni locali.

Procedure numeriche e sperimentali

Il confronto con soluzioni note e passi differenti verifica il calcolo. Il confronto con nuove misure valuta le ipotesi fisiche. Le due procedure usano riferimenti diversi e devono restare riconoscibili: un istogramma prodotto dal simulatore da solo non conferma la validità fisica del modello.

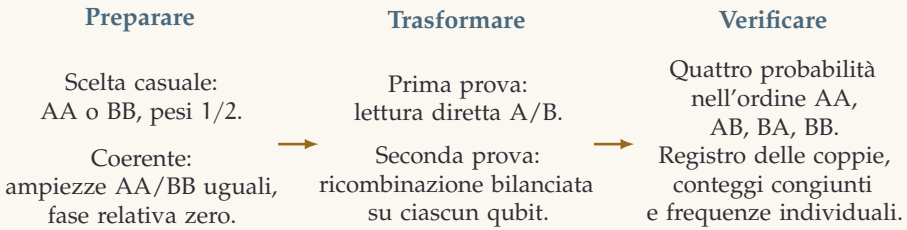


Grafici di procedura, con valori illustrativi. Ogni applicazione deve indicare provenienza dei dati, incertezze e condizioni del confronto.

Halliday–Resnick–Walker, *Fundamentals of Physics*, capp. 2 e 5. Esempi del modello.

Progetto conclusivo: distinguere due preparazioni

Implementiamo le due sorgenti già studiate. Il programma deve separare preparazione, trasformazione e campionamento. Calcoliamo prima le probabilità esatte e poi generiamo gli eventi. Il confronto deve spiegare perché la seconda lettura distingue le sorgenti mentre i soli conteggi individuali rimangono uguali.



Consegna: regole del modello, probabilità calcolate, codice e campione con seme riproducibile. Nuove coppie per ogni prova.

Modelli ideali del corso. Il progetto verifica implementazione e previsioni dichiarate.

Confronto delle due sorgenti

Confrontiamo la misura diretta A/B con una misura preceduta dalla stessa ricombinazione bilanciata su ciascun qubit. La sovrapposizione considerata ha ampiezze AA e BB uguali e fase relativa nulla.

Misura	**Scelta casuale AA/BB**	**Sovrapposizione AA/BB**
Diretta A/B	50% AA, 50% BB	50% AA, 50% BB
Dopo ricombinazione	25% per ciascuna coppia	50% AA, 50% BB
Solo esiti individuali, nelle due misure	50% A, 50% B per ciascun qubit	50% A, 50% B per ciascun qubit

La seconda misura distingue le sorgenti attraverso le correlazioni. I conteggi individuali restano uguali. I valori indicati sono probabilità teoriche del modello ideale.

Riferimenti: Haroche–Raimond, §2.4; Mermin, §6.1.

Progetto: quattro controlli prima del campionamento

Confrontiamo le distribuzioni del programma con i valori del modello, prima di estrarre eventi casuali. Cambiare la fase da zero a mezzo ciclo scambia coppie concordi e discordi nella sorgente coerente. Questa prova controlla che la fase sia conservata. Somme e margini delle tabelle verificano normalizzazione e ordinamento degli esiti.

Test sulle probabilità esatte	Riscontro atteso: AA, AB, BA, BB
Diretta, entrambe le sorgenti	$(1/2, 0, 0, 1/2)$
Ricombinazione, scelta casuale	$(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$
Ricombinazione, coerente: fase zero	$(1/2, 0, 0, 1/2)$
Ricombinazione, coerente: fase π	$(0, 1/2, 1/2, 0)$

Ogni riga somma a uno. Nella lettura di ciascun qubit, A e B restano entrambi a probabilità $1/2$.

Calcoli del modello ideale già sviluppato. Confronti numerici con tolleranza dichiarata nell'implementazione.

Media e dispersione di una distribuzione

Consideriamo i valori $1, 2, 3, 2$, ciascuno con peso $1/4$. La media è

$$\mu = (1 + 2 + 3 + 2)/4 = 8/4 = 2.$$

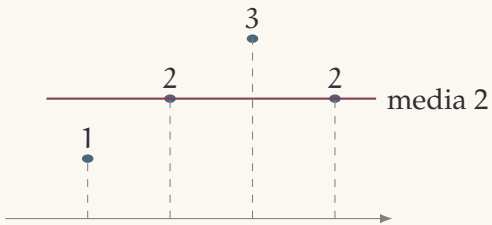
Gli scarti sono $-1, 0, 1, 0$. La varianza media i loro quadrati:

$$\sigma^2 = \frac{(-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

La deviazione standard è

$$\sigma = \sqrt{1/2} \simeq 0{,}7071.$$

Media e deviazione standard hanno le unità della grandezza osservata.



Il calcolo descrive una distribuzione con pesi assegnati; la stima da un campione richiederà una scelta dello stimatore.

La variabilità di una singola prova

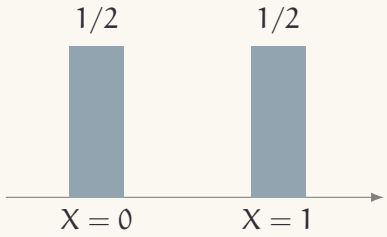
Nel progetto, definiamo $X = 1$ per una coppia discorde e $X = 0$ per una coppia concorde. Ogni esito ha probabilità $1/2$:

$$\mu_X = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Per definizione di varianza,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= (0 - 1/2)^2 \frac{1}{2} + (1 - 1/2)^2 \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Quindi $\sigma_X = \sqrt{1/4} = 1/2$.



Il numero di coppie discordi somma questi indicatori su tutte le prove; le prove sono assunte indipendenti.

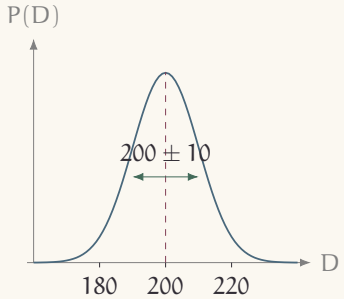
Quattrocento prove indipendenti

Il conteggio $D = \sum_{j=1}^{400} X_j$ somma indicatori indipendenti con media $1/2$ e varianza $1/4$:

$$\mathbb{E}[D] = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200.$$

Per $Y_j = X_j - 1/2$, si ha $\mathbb{E}[Y_j] = 1/2 - 1/2 = 0$ e $\mathbb{E}[Y_j^2] = 1/4$. Se $j \neq k$, l'indipendenza dà

$$\mathbb{E}[Y_j Y_k] = \mathbb{E}[Y_j]\mathbb{E}[Y_k] = 0 \cdot 0 = 0.$$



Distribuzione binomiale esatta; finestra $160 \leq D \leq 240$.

Gli indicatori centrati hanno media nulla; il loro prodotto medio si annulla quando gli indici sono diversi.

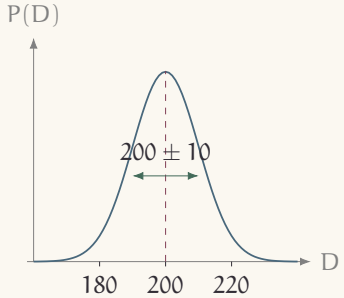
Espandere la varianza del conteggio

Poniamo $S = \sum_{j=1}^{400} Y_j = D - 200$. Nel quadrato, i termini con indici diversi compaiono a coppie:

$$S^2 = \sum_j Y_j^2 + 2 \sum_{j<k} Y_j Y_k.$$

Calcoliamo quindi il valore medio:

$$\mathrm{Var}(D) = \sum_j \mathbb{E}[Y_j^2] + 2 \sum_{j<k} \mathbb{E}[Y_j Y_k].$$



Distribuzione binomiale esatta; finestra $160 \leq D \leq 240$.

La varianza del conteggio coincide con il valore medio del quadrato dello scarto S.

Calcolare la varianza e la deviazione standard

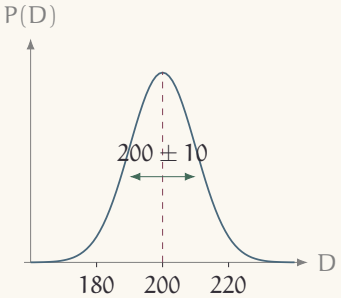
Sostituiamo $\mathbb{E}[Y_j^2] = 1/4$ e $\mathbb{E}[Y_j Y_k] = 0$ per $j \neq k$:

$$\mathrm{Var}(D) = 400 \cdot \frac{1}{4} + 2 \sum_{j<k} 0$$

$$= 100 + 0 = 100.$$

La deviazione standard è la radice della varianza:

$$\sigma_D = \sqrt{100} = 10 \text{ eventi.}$$



Distribuzione binomiale esatta; finestra $160 \leq D \leq 240$.

La varianza si misura in eventi al quadrato; la deviazione standard torna all'unità del conteggio.

Confrontare il campione con la dispersione prevista

Nel campione, le due classi discordi comprendono rispettivamente 101 e 91 eventi. Il conteggio osservato è

$$D = 101 + 91 = 192.$$

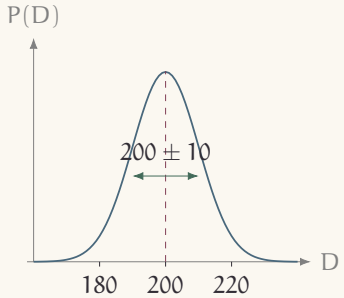
La media prevista vale 200; lo scarto osservato è

$$D - \mathbb{E}[D] = 192 - 200 = -8.$$

Dividendo per $\sigma_D = 10$ eventi, otteniamo

$$\frac{192 - 200}{10} = \frac{-8}{10} = -0{,}8.$$

Il campione si trova quindi 0,8 deviazioni standard sotto la media.



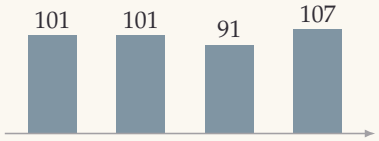
Distribuzione binomiale esatta; finestra $160 \leq D \leq 240$.

Il confronto quantifica lo scarto rispetto al modello di prove indipendenti ed equiprobabili.

Progetto: leggere un campione finito

Per la scelta casuale, ogni prova della seconda lettura produce una coppia discorde con probabilità 1/2. In 400 prove il numero medio è 200. La deviazione standard misura l'ampiezza tipica delle fluttuazioni, qui 10 eventi. Confrontiamo il registro con questa previsione, distinguendo l'errore di calcolo dalla variabilità del campione.

Scelta casuale, seconda lettura



400 coppie; seme 20260925.
Campione generato dal modello.

Contare le coppie discordi

$$D = N_{AB} + N_{BA} = 192$$

$$E[D] = 400 \cdot \tfrac{1}{2} = 200$$

$$\sigma_D = \sqrt{400 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}} = 10$$

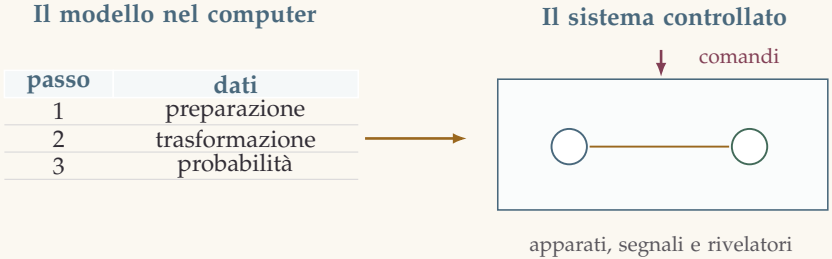
Scarto dalla media: $192 - 200 = -8$.
Sorgente coerente ideale, fase zero: $D = 0$.

Prove simulate indipendenti; condizioni fisse. Le perdite e gli errori di laboratorio richiedono un altro modello.

Modello binomiale indipendente; campione generato dalle probabilità del progetto. Nessun dato sperimentale.

Dal modello al dispositivo fisico

Abbiamo costruito una descrizione capace di prevedere le operazioni su piccoli sistemi. Passiamo ora agli apparati che possono realizzarle. Per ogni tecnologia seguiremo il supporto del qubit, i comandi che lo trasformano e il segnale attraverso cui il risultato torna al programma.



Raccordo verso l'hardware. I dati numerici del simulatore e i segnali del dispositivo sono collegati dalla descrizione delle operazioni.

IBM Quantum Learning, sistemi composti; Mermin, cap. 1.

Approfondimento fisico: dai comandi al dispositivo

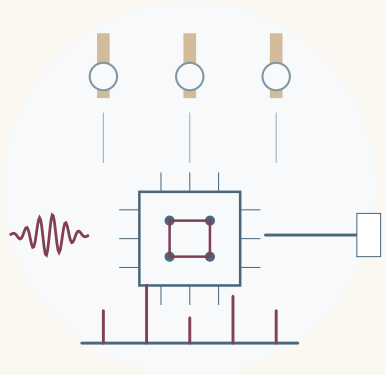
Preparazione, trasformazione e misura sono già definite nel modello. Le realizzazioni fisiche spiegano come ottenerle mediante componenti controllabili. Seguendo una piattaforma ritroveremo sempre il supporto dello stato, il comando e il segnale della lettura.



Torna al progetto Prosegui alla storia Tutto l'approfondimento hardware e fotonico rimane incluso.

PARTE X

Come si costruisce un computer quantistico



Dall'apparato ottico a una macchina programmabile

Con le lamine abbiamo preparato e trasformato la polarizzazione della luce. Per eseguire una procedura scelta dal programma occorre comandare le operazioni, stabilirne l'ordine e raccogliere i risultati. Costruiamo ora un apparato nel quale queste funzioni sono affidate a segnali controllati elettronicamente.

Apparato già studiato



Una sequenza scelta dal programma

1. Preparare A
2. Trasformare lo stato
3. Misurare e registrare

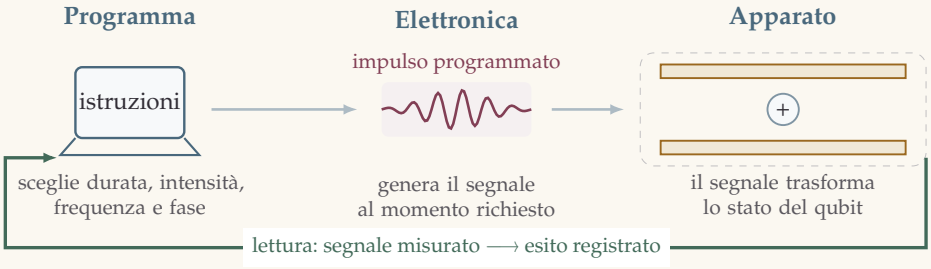
ogni istruzione deve avere una realizzazione fisica

Seguiremo le stesse funzioni con un atomo controllato da impulsi di luce.

Raccordo con la Parte VI. DiVincenzo, Fortschr. Phys. 48, 771 (2000).

Dal programma ai segnali fisici

Seguiamo un comando dal programma fino allo ione. Il computer ne stabilisce i parametri; l'elettronica genera l'impulso e lo invia all'apparato. Al termine della sequenza, la misura produce un segnale che torna al computer e viene associato a un esito.

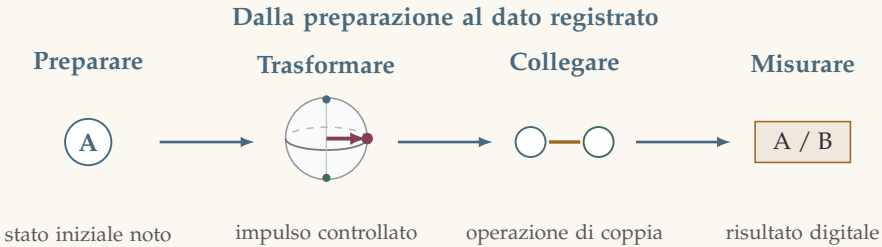


Le frecce rappresentano comandi e dati classici. Il qubit rimane nel suo apparato durante la sequenza.

Schema funzionale; comandi e acquisizione coordinati nel tempo. Bruzewicz et al., Appl. Phys. Rev. (2019).

Le funzioni da realizzare

Un computer quantistico deve preparare stati ripetibili, applicare trasformazioni, collegare qubit e produrre risultati leggibili. Ogni funzione richiede un componente dell'apparato e un comando controllato. Seguendo questa catena potremo confrontare tecnologie differenti attraverso gli stessi compiti.



Frecce fra riquadri: ordine delle funzioni. Il dettaglio di ciascun dispositivo viene sviluppato nelle slide successive.

Bruzewicz et al., *Trapped-ion quantum computing*, 2019. Schemi illustrativi.

Dall'atomo neutro allo ione

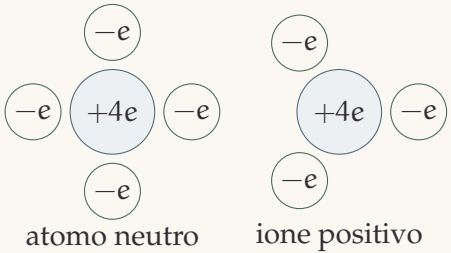
Un atomo contiene un nucleo di carica $+Ze$ ed elettroni di carica $-e$, dove $e > 0$. Con Z elettroni la carica totale è

$$q = Ze - Ze = 0.$$

Se viene rimosso un elettrone, ne restano $Z - 1$:

$$q = Ze - (Z-1)e = Ze - Ze + e = +e.$$

La particella così ottenuta è uno ione positivo. La carica permette di controllarne il moto attraverso campi elettrici.



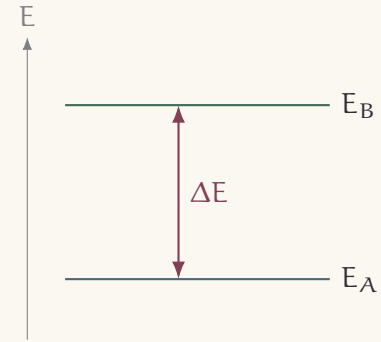
Il disegno conta le cariche in un esempio Z=4; i cerchi degli elettroni sono simboli, senza significato di orbita.

Scegliere due stati interni dello ione

Gli stati interni descrivono configurazioni quantistiche dello stesso ione. Scegliamo due stati distinguibili, A e B, con energie E_A ed E_B. Nel diagramma, l'altezza rappresenta l'energia. La separazione è

$$\Delta E = E_B - E_A > 0.$$

Un segnale risonante può collegarli quando la sua frequenza soddisfa $hf = \Delta E$, cioè $f = \Delta E/h$, con h costante di Planck. Il comando può preparare una coppia di ampiezze per A e B.

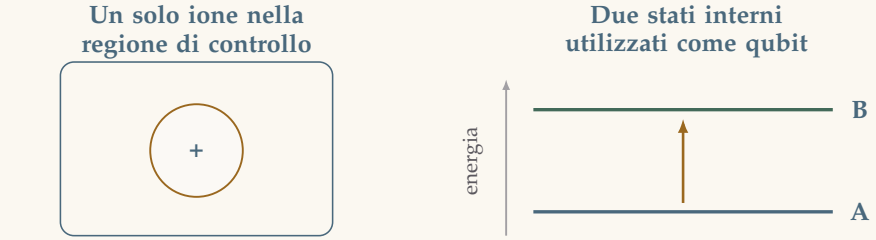


Due stati interni selezionati

Il confinamento riguarda il moto dello ione; il qubit viene codificato nei due stati interni scelti.

Due stati interni dello stesso atomo

Il qubit può essere codificato in due stati interni di uno stesso ione. Li chiamiamo A e B. Il diagramma energetico distingue questi stati attraverso la loro energia, mentre l'ione rimane confinato nella stessa regione dell'apparato. Un segnale adatto permette di controllare la transizione.



Le righe rappresentano energie, non posizioni o orbite dell'atomo.
La specie ionica e la codifica fissano i livelli effettivamente utilizzati.

Bruzewicz et al., *Trapped-ion quantum computing*, 2019. Schemi illustrativi.

Dal comando elettrico alla forza sullo ione

Un campo elettrico esercita una forza su una carica. Gli elettrodi sono superfici metalliche alle quali applichiamo tensioni controllate: esse modificano il campo nella regione dello ione. Nella trappola si combinano più elettrodi e campi variabili nel tempo per mantenere il moto vicino alla posizione di lavoro.

Due elettrodi e uno ione



I segni indicano le cariche sulle superfici.
Il disegno mostra una forza,
non una trappola completa.

I parametri regolati dal programma

Elettrodi: superfici metalliche collegate all'elettronica.

Tensione: indica l'energia scambiata per unità di carica fra due punti.

Variando la tensione cambiano il campo e la forza sulla carica.

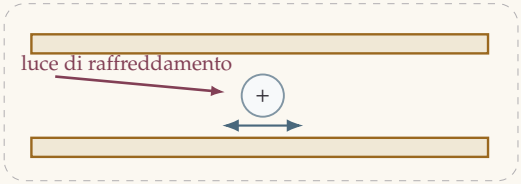
Nella trappola ionica la geometria degli elettrodi e campi variabili nel tempo realizzano il confinamento.

Confinamento qualitativo. Bruzewicz et al., Appl. Phys. Rev. (2019).

Trattenere lo ione e controllarne il moto

Nella trappola scelta, campi elettrici statici e oscillanti limitano gli spostamenti dello ione. Il vuoto riduce gli urti con il gas. Una luce opportunamente regolata riduce l'energia del moto attraverso scambi ripetuti di quantità di moto. Preparare il moto e preparare lo stato interno A/B sono operazioni distinte.

Elettrodi nella camera da vuoto



il confinamento limita la regione accessibile

Tre compiti distinti

Campi elettrici:
confinare lo ione.

Vuoto:
ridurre gli urti.

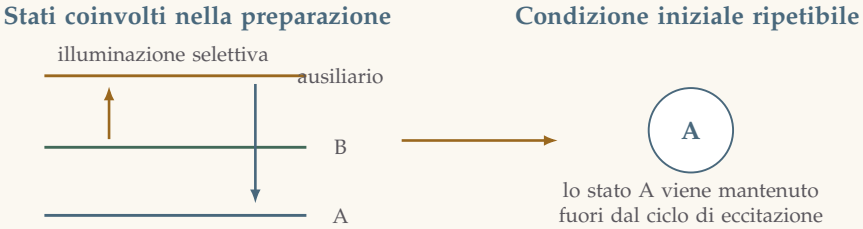
Luce di raffreddamento:
ridurre l'agitazione del moto.

I campi variabili e statici della trappola sono rappresentati in modo schematico.

Bruzewicz et al., Appl. Phys. Rev. (2019).

Preparare lo stesso stato iniziale

Una sequenza di illuminazione aumenta la probabilità di trovare lo ione nello stato A. La luce utilizza anche un livello ausiliario, seguito da un decadimento verso altri livelli. Mantenendo A fuori dal ciclo di eccitazione, le ripetizioni favoriscono questa preparazione, entro l'accuratezza del dispositivo.



Schema di pompaggio ottico semplificato. Le frecce rappresentano transizioni indotte e decadimenti; le probabilità reali dipendono dai livelli atomici.

Bruzewicz et al., *Trapped-ion quantum computing*, 2019. Schemi illustrativi.

Una differenza di energia seleziona una frequenza

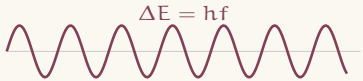
Nell'esempio ottico, il passaggio A–B richiede l'energia ΔE. La luce di frequenza f scambia quanti di energia hf, dove h è la costante di Planck. La corrispondenza $hf = \Delta E$ permette al laser di controllare quella transizione. Durata e intensità determinano poi quanto procede la trasformazione.

Due livelli, una differenza



un salto fra A e B richiede
un quanto di energia fissato

Un'onda porta energia a pacchetti



frequenza alta: molti cicli al secondo

quando la frequenza corrisponde
alla differenza di energia,
il segnale può collegare
efficacemente A e B

La formula è solo un promemoria: maggiore è la frequenza, maggiore è l'energia del quanto scambiato.

La relazione $\Delta E = hf$ è richiamata solo come criterio di corrispondenza. Bruzewicz et al., Appl. Phys. Rev. (2019).

Scegliere un impulso che agisce sui due stati

Una volta fissata la frequenza, il segnale mette in comunicazione A e B. Durata, intensità e fase dell'impulso stabiliscono quale trasformazione viene realizzata. In questo modo un comando del programma diventa un intervento fisico sullo ione.



il segnale mette in comunicazione i due stati del qubit

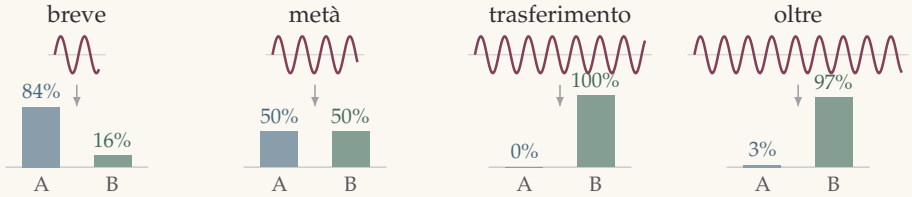
Nell'esempio ottico si usa luce laser. Altre codifiche nello ione richiedono segnali differenti.

Esempio di controllo coerente a due livelli. Roos et al., Phys. Rev. Lett. 83, 4713 (1999).

La trasformazione continua finché agisce l'impulso

Prepariamo A e manteniamo frequenza e intensità dell'impulso fisse. Mentre il segnale agisce, cambiano le ampiezze di A e B. Una durata calibrata trasferisce A in B; prolungandola, la trasformazione continua. Ogni durata viene provata su una nuova preparazione, seguita dalla misura.

Durata dell'impulso e probabilità



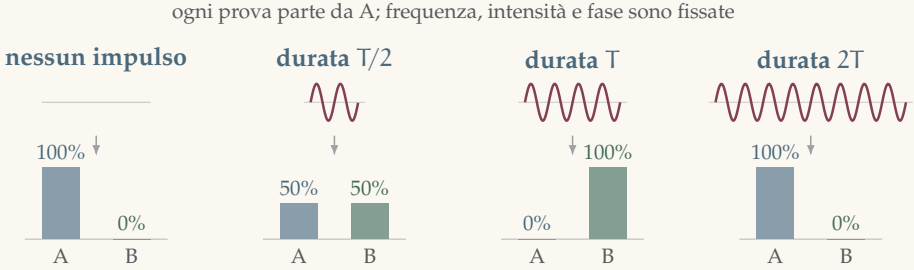
La durata stabilisce dove interrompiamo la trasformazione.

Modello ideale a due livelli. I valori illustrano il moto continuo fra A e B.

Modello ideale a due livelli; probabilità illustrative. Roos et al., Phys. Rev. Lett. 83, 4713 (1999).

Cambiare la durata dell'impulso

Prepariamo sempre A e inviamo impulsi con la stessa frequenza. Cambiando solo la durata osserviamo frequenze finali diverse. Questa prova consente di calibrare il comando: il trasferimento completo $A \to B$ corrisponde a una durata specifica, non a un'operazione istantanea.

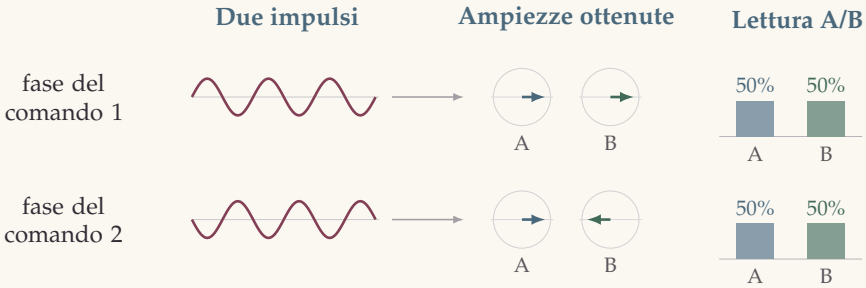


T è la durata del trasferimento completo ideale $A \to B$. Le barre indicano probabilità di lettura.

T è la durata del trasferimento completo ideale. Roos et al., Phys. Rev. Lett. 83, 4713 (1999).

Anche la fase del comando è un dato fisico

Due impulsi con la stessa durata possono preparare ampiezze di uguale modulo ma con fasi differenti. Una misura diretta A/B non distingue sempre queste preparazioni; una successiva operazione di analisi può renderle distinguibili. Ritroviamo il ruolo della fase già visto con le lamine.

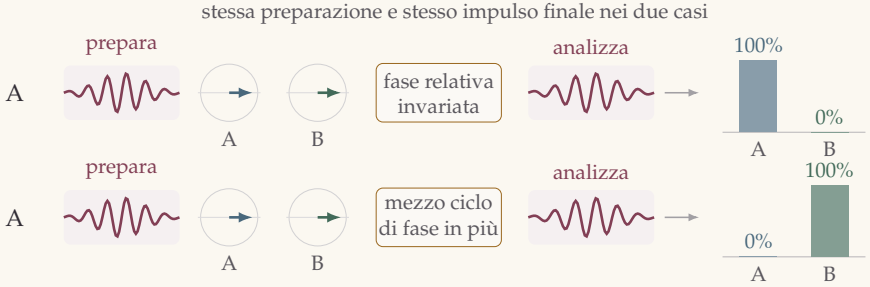


Esempi ideali con impulso T/2. Le frecce indicano ampiezze, con lo stesso riferimento di fase.

Esempi ideali con impulso T/2. Roos et al., Phys. Rev. Lett. 83, 4713 (1999).

Una sequenza di impulsi realizza l'interferenza

Un primo impulso prepara due contributi. Un'operazione intermedia modifica oppure lascia invariata la loro fase relativa. Un impulso finale converte questa differenza in probabilità di lettura. La struttura è la stessa studiata con la polarizzazione: preparare, modificare, analizzare, misurare.



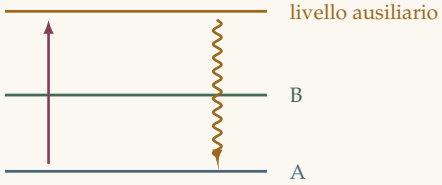
L'impulso di analisi annulla la preparazione nel primo caso. Il controllo di fase cambia l'esito.

Interferenza a due livelli, modello ideale. Roos et al., Phys. Rev. Lett. 83, 4713 (1999).

La misura rende distinguibili i due stati

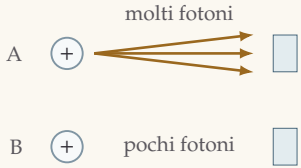
Per leggere il qubit usiamo una luce scelta per la rivelazione. Nello stato A lo ione può assorbirla ed emetterla ripetutamente: un rivelatore raccoglie molti fotoni. B partecipa molto meno a questo ciclo. La differenza fra i conteggi permette di assegnare un esito alla singola prova.

Illuminazione per la lettura



A partecipa a un ciclo che emette luce

Segnali raccolti



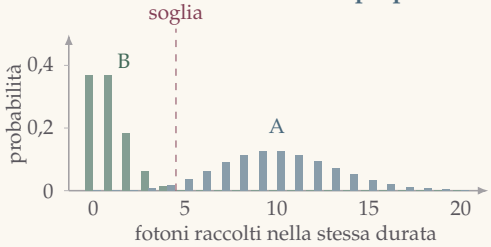
Il livello ausiliario di lettura è esterno al qubit. B è quasi scuro per questa illuminazione.

Fluorescenza dipendente dallo stato; livelli ausiliari schematici. Myerson et al., Phys. Rev. Lett. 100, 200502 (2008).

Dal conteggio al bit registrato

Preparando A e B separatamente possiamo caratterizzare i conteggi prodotti dal rivelatore. Il programma sceglie una soglia e assegna ogni nuova misura a uno dei due esiti. Le distribuzioni possono sovrapporsi: anche questa conversione dal segnale fisico al dato digitale ha un'incertezza.

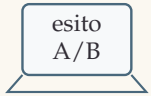
Calibrazione con A e B preparati



Assegnare un risultato

0–4 fotoni: B

5 o più fotoni: A



Distribuzioni di Poisson illustrative: medie 1 e 10. La sovrapposizione comporta errori di lettura.

Conteggi teorici illustrativi, senza dati sperimentali. Myerson et al., Phys. Rev. Lett. 100, 200502 (2008).

Ripetere la sequenza e stimare le probabilità

Una misura finale restituisce un esito. Per stimarne la probabilità, il computer ripete la preparazione e l'intera sequenza, conservando i risultati di ogni prova. I conteggi diventano frequenze; aumentando le ripetizioni si riduce l'incertezza statistica, purché le condizioni dell'apparato restino stabili.

Ogni esecuzione ricomincia da A



Registro del programma

prova:	1	2	3	4	5	6	7	8
esito:	A	B	A	A	B	B	A	A

A: 5 su 8 B: 3 su 8

le frequenze sono stime soggette a fluttuazioni

Otto esiti illustrativi. La lista proviene da otto preparazioni ed esecuzioni distinte.

Procedura di acquisizione illustrativa. NIST, Quantum Computing Explained.

Due ioni condividono il moto nella trappola

Due ioni confinati nella stessa trappola si respingono. I loro piccoli movimenti sono quindi collegati: esistono oscillazioni che coinvolgono entrambi. Questo movimento collettivo offre il supporto fisico attraverso cui gli stati interni dei due qubit possono influenzarsi.

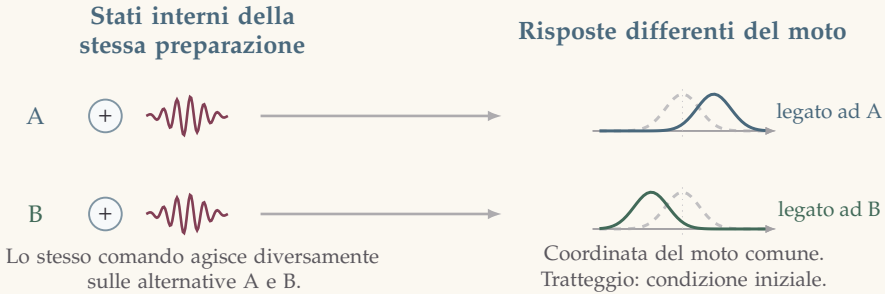


È mostrato un modo comune del moto, con spostamenti amplificati per renderli visibili.

Cirac e Zoller, Phys. Rev. Lett. (1995).

Uno stato interno può modificare il moto

Gli impulsi possono esercitare un'azione dipendente dallo stato interno dello ione. I contributi A e B diventano così correlati a risposte diverse del moto collettivo. Le due righe permettono di seguire questa correlazione, mantenendo riconoscibile la condizione iniziale.



Le righe sono contributi della stessa preparazione coerente; le curve sono schemi del moto.

Forza dipendente dallo stato; curve illustrative. Bruzewicz et al. (2019), rassegna sugli ioni intrappolati.

Il moto funziona da tramite fra due qubit

Il primo controllo collega lo stato interno al moto condiviso. Il secondo ione risente di quel moto e può partecipare a una trasformazione della coppia. Per completare la porta, la sequenza deve riportare il moto nella condizione prevista, conservando negli stati interni l'effetto congiunto. Il moto costituisce il tramite fisico dell'operazione.

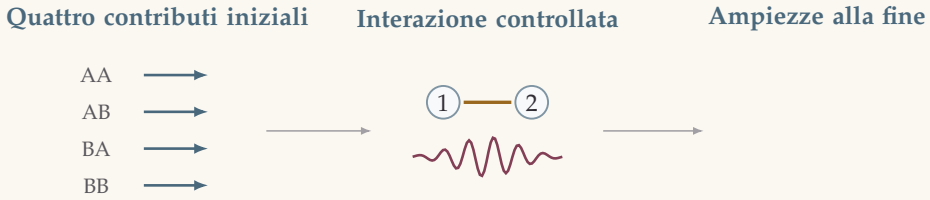


I segmenti indicano accoppiamenti controllati. Il moto appartiene alla coppia di ioni e partecipa alla porta.

Collegamento mediato dal moto; la sequenza dipende dalla porta. Bruzewicz et al. (2019), rassegna sugli ioni intrappolati.

Usare il moto per una trasformazione della coppia

Una porta di fase cambia il segno del contributo BB e conserva i moduli delle quattro ampiezze. Una sequenza calibrata può realizzarla attraverso il moto. Alla fine il moto ritorna alla stessa condizione per tutte le alternative e nei qubit resta la trasformazione congiunta.



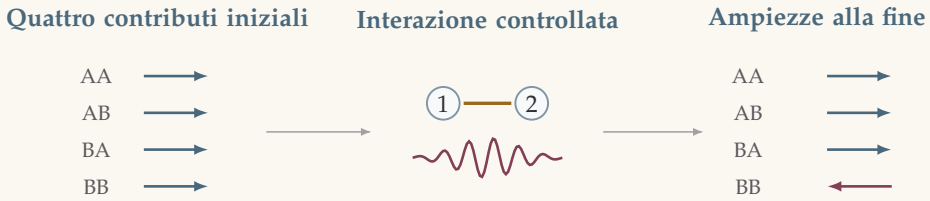
Le frecce rappresentano ampiezze della coppia nel medesimo riferimento di fase.

Esempio ideale di porta di fase: cambia il segno di BB. A fine sequenza il moto è disaccoppiato dai qubit.

Porta di fase ideale, con trasformazioni locali opportune. Bruzewicz et al. (2019), rassegna sugli ioni intrappolati.

Usare il moto per una trasformazione della coppia

Una porta di fase cambia il segno del contributo BB e conserva i moduli delle quattro ampiezze. Una sequenza calibrata può realizzarla attraverso il moto. Alla fine il moto ritorna alla stessa condizione per tutte le alternative e nei qubit resta la trasformazione congiunta.



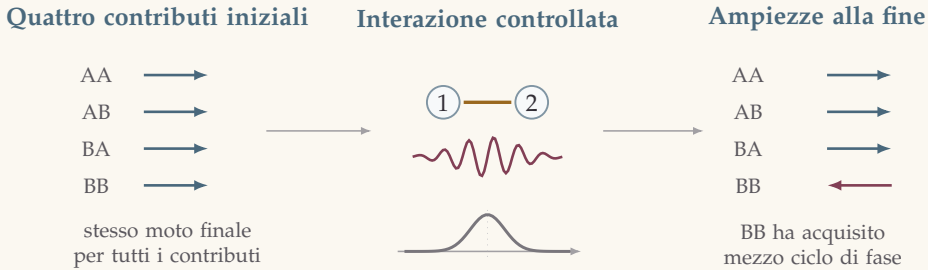
Le frecce rappresentano ampiezze della coppia nel medesimo riferimento di fase.

Esempio ideale di porta di fase: cambia il segno di BB. A fine sequenza il moto è disaccoppiato dai qubit.

Porta di fase ideale, con trasformazioni locali opportune. Bruzewicz et al. (2019), rassegna sugli ioni intrappolati.

Usare il moto per una trasformazione della coppia

Una porta di fase cambia il segno del contributo BB e conserva i moduli delle quattro ampiezze. Una sequenza calibrata può realizzarla attraverso il moto. Alla fine il moto ritorna alla stessa condizione per tutte le alternative e nei qubit resta la trasformazione congiunta.

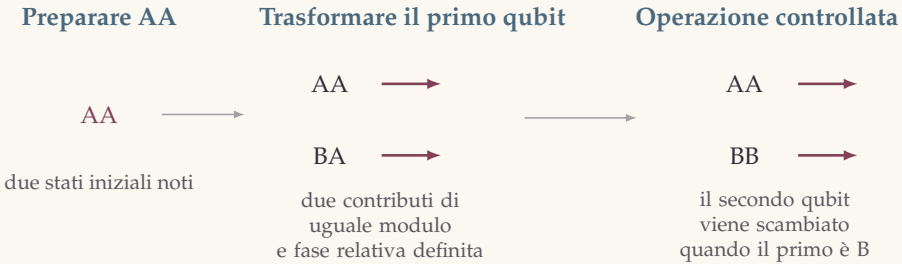


Esempio ideale di porta di fase: cambia il segno di BB. A fine sequenza il moto è disaccoppiato dai qubit.

Porta di fase ideale, con trasformazioni locali opportune. Bruzewicz et al. (2019), rassegna sugli ioni intrappolati.

Preparare uno stato congiunto già incontrato

Partiamo da AA e prepariamo il primo qubit con due ampiezze uguali. Una sequenza che realizza uno scambio controllato sul secondo qubit porta i contributi AA e BA in AA e BB. Regolando le fasi otteniamo la sovrapposizione della Parte VII, verificabile anche attraverso letture in un altro riferimento.

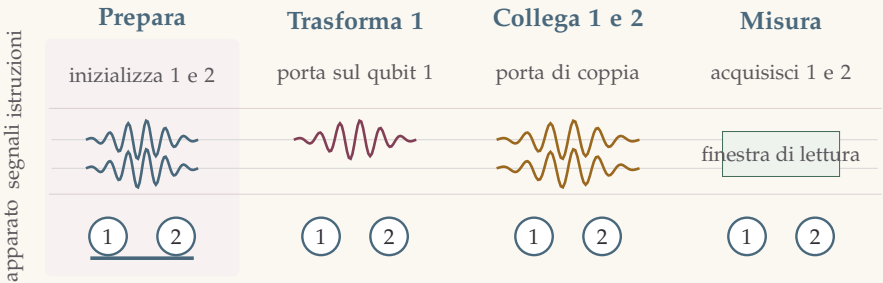


Fasi locali regolate: sovrapposizione coerente AA/BB. La sola lettura A/B dà 50% AA e 50% BB.

Sequenza ideale con fasi regolate. Ballance et al., Phys. Rev. Lett. 117, 060504 (2016).

Una procedura diventa una cronologia di segnali

Ogni colonna rappresenta una fase della stessa esecuzione. Leggendola dall'alto in basso troviamo l'istruzione, i segnali inviati e le parti dell'apparato coinvolte. La misura chiude la sequenza e restituisce una coppia di risultati al programma.

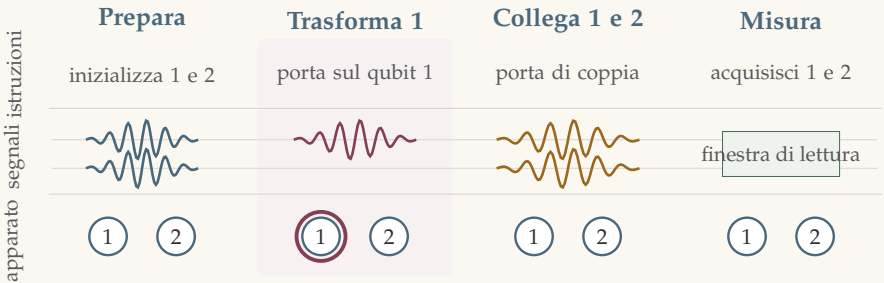


La colonna evidenziata collega istruzione, segnali e componenti interessati. Forme e durate sono illustrative.

Cronologia illustrativa; impulsi da calibrare per la piattaforma. Bruzewicz et al. (2019), rassegna sugli ioni intrappolati.

Una procedura diventa una cronologia di segnali

Ogni colonna rappresenta una fase della stessa esecuzione. Leggendola dall'alto in basso troviamo l'istruzione, i segnali inviati e le parti dell'apparato coinvolte. La misura chiude la sequenza e restituisce una coppia di risultati al programma.

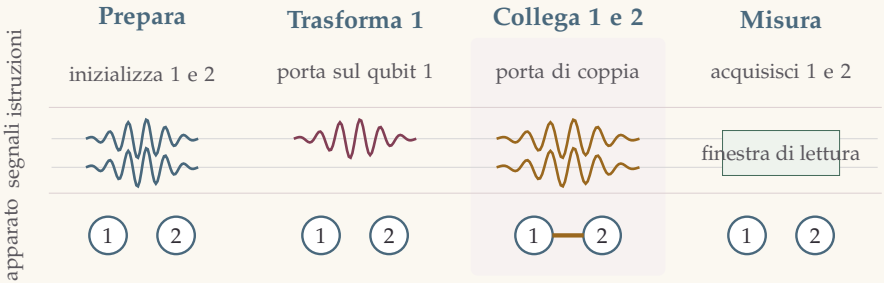


La colonna evidenziata collega istruzione, segnali e componenti interessati. Forme e durate sono illustrative.

Cronologia illustrativa; impulsi da calibrare per la piattaforma. Bruzewicz et al. (2019), rassegna sugli ioni intrappolati.

Una procedura diventa una cronologia di segnali

Ogni colonna rappresenta una fase della stessa esecuzione. Leggendola dall'alto in basso troviamo l'istruzione, i segnali inviati e le parti dell'apparato coinvolte. La misura chiude la sequenza e restituisce una coppia di risultati al programma.

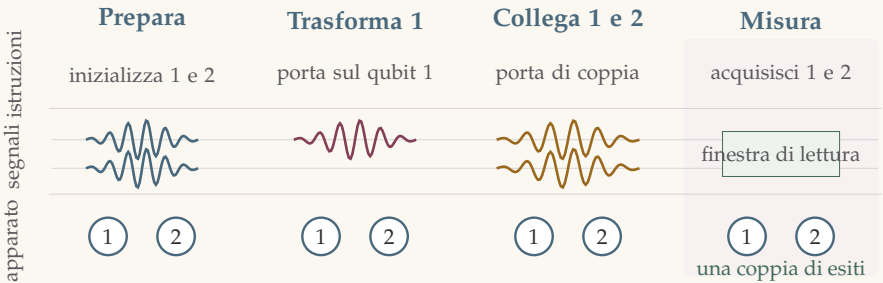


La colonna evidenziata collega istruzione, segnali e componenti interessati. Forme e durate sono illustrative.

Cronologia illustrativa; impulsi da calibrare per la piattaforma. Bruzewicz et al. (2019), rassegna sugli ioni intrappolati.

Una procedura diventa una cronologia di segnali

Ogni colonna rappresenta una fase della stessa esecuzione. Leggendola dall'alto in basso troviamo l'istruzione, i segnali inviati e le parti dell'apparato coinvolte. La misura chiude la sequenza e restituisce una coppia di risultati al programma.



La colonna evidenziata collega istruzione, segnali e componenti interessati. Forme e durate sono illustrative.

Cronologia illustrativa; impulsi da calibrare per la piattaforma. Bruzewicz et al. (2019), rassegna sugli ioni intrappolati.

Il circuito astratto incontra i collegamenti reali

Il programma usa i nomi q, s e r. La macchina dispone dei siti fisici 1, 2 e 3, con collegamenti fra vicini. Nell'assegnazione iniziale, q e r occupano i siti estremi: per realizzare la loro porta serve una sequenza che utilizzi i collegamenti disponibili.

Operazione richiesta



Il programma richiede una porta fra q e r.

Collegamenti della macchina



Un arco continuo indica una porta di coppia disponibile. Il nome dentro il nodo indica lo stato assegnato.

Macchina di esempio con tre siti in linea. Il vincolo riguarda le operazioni disponibili, non la distanza sul disegno.

Esempio di connettività locale. IBM Quantum, Introduction to transpilation.

Il circuito astratto incontra i collegamenti reali

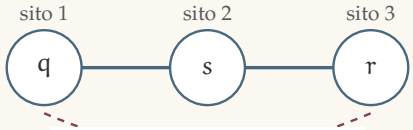
Il programma usa i nomi q, s e r. La macchina dispone dei siti fisici 1, 2 e 3, con collegamenti fra vicini. Nell'assegnazione iniziale, q e r occupano i siti estremi: per realizzare la loro porta serve una sequenza che utilizzi i collegamenti disponibili.

Operazione richiesta



Il programma richiede una porta fra q e r.

Collegamenti della macchina



Un arco continuo indica una porta di coppia disponibile.
Il nome dentro il nodo indica lo stato assegnato.

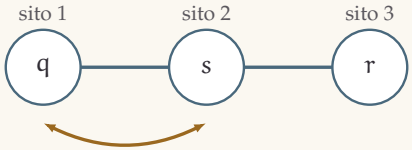
Macchina di esempio con tre siti in linea. Il vincolo riguarda le operazioni disponibili, non la distanza sul disegno.

Esempio di connettività locale. IBM Quantum, Introduction to transpilation.

Riscrivere la sequenza per la macchina

Una possibile riscrittura scambia gli stati dei primi due siti. q e r diventano così adiacenti e la macchina può applicare la porta fra i siti 2 e 3. Il compilatore conserva la nuova corrispondenza fra i nomi del programma e le posizioni fisiche.

Siti fissi, assegnazione aggiornata



1. Scambiare gli stati dei siti 1 e 2

q passa al sito 2; s passa al sito 1.

Lo scambio è una trasformazione degli stati, chiamata SWAP. I componenti fisici rimangono nei rispettivi siti.

La mappa finale va usata anche nell'interpretazione delle misure successive. IBM Quantum, Introduction to transpilation.

Riscrivere la sequenza per la macchina

Una possibile riscrittura scambia gli stati dei primi due siti. q e r diventano così adiacenti e la macchina può applicare la porta fra i siti 2 e 3. Il compilatore conserva la nuova corrispondenza fra i nomi del programma e le posizioni fisiche.

Siti fissi, assegnazione aggiornata



2. Applicare la porta ai siti 2 e 3

Mappa aggiornata: $s \mapsto 1, \quad q \mapsto 2, \quad r \mapsto 3.$

Lo scambio è una trasformazione degli stati, chiamata SWAP. I componenti fisici rimangono nei rispettivi siti.

La mappa finale va usata anche nell'interpretazione delle misure successive. IBM Quantum, Introduction to transpilation.

Riscrivere la sequenza per la macchina

Una possibile riscrittura scambia gli stati dei primi due siti. q e r diventano così adiacenti e la macchina può applicare la porta fra i siti 2 e 3. Il compilatore conserva la nuova corrispondenza fra i nomi del programma e le posizioni fisiche.

Siti fissi, assegnazione aggiornata



2. Applicare la porta ai siti 2 e 3

Mappa aggiornata: $s \mapsto 1, \quad q \mapsto 2, \quad r \mapsto 3.$

Lo scambio è una trasformazione degli stati, chiamata SWAP. I componenti fisici rimangono nei rispettivi siti.

La mappa finale va usata anche nell'interpretazione delle misure successive. IBM Quantum, Introduction to transpilation.

Un circuito può conservare e scambiare energia

Il condensatore separa cariche e conserva energia nel campo elettrico. La capacità lega carica e tensione. L'induttanza conserva energia nel campo magnetico prodotto dalla corrente. Collegando i componenti, l'energia passa periodicamente fra le due forme: otteniamo un oscillatore.

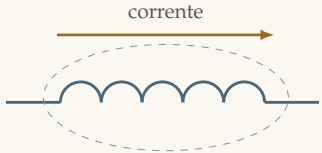
Condensatore: cariche separate



L'energia è associata al campo elettrico fra le due superfici.



Induttanza: corrente e campo



L'energia è associata al campo magnetico prodotto dalla corrente.

Il collegamento permette lo scambio di energia fra le due forme.

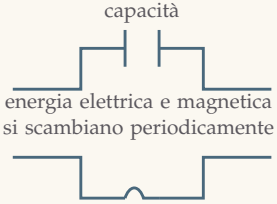
Schema di riferimento senza dissipazione. Capacità e induttanza sono proprietà dei componenti.

OpenStax, University Physics 2, §14.5.

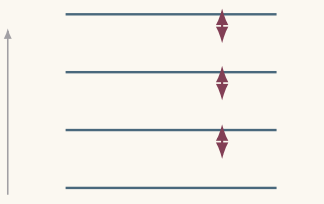
Un circuito quantistico su chip: l'oscillatore di partenza

Consideriamo ora le energie ammesse dalla descrizione quantistica dell'oscillatore. I livelli del modello di riferimento sono equidistanti. Una stessa frequenza può quindi agire su più transizioni. Per controllare selettivamente A e B modifichiamo il circuito, rendendo il loro salto energetico diverso da quello successivo.

Un circuito può oscillare



Livelli equidistanti e selettività

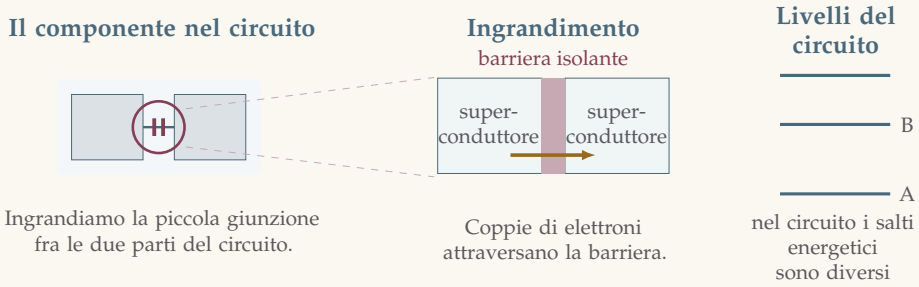


Il transmon modifica l'oscillatore per ottenere livelli non equidistanti.

Schema didattico di oscillatore quantizzato. Koch et al., Phys. Rev. A 76, 042319 (2007).

Il ruolo della giunzione Josephson

Nel superconduttore gli elettroni formano coppie di Cooper, che sostengono correnti senza resistenza continua. La giunzione contiene una barriera sottile: le coppie possono attraversarla per effetto tunnel. Questo componente modifica l'oscillatore, rendendo differenti i salti fra i livelli energetici.



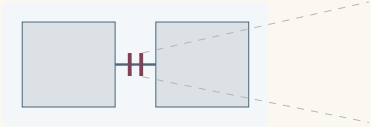
Le coppie di elettroni sono dette coppie di Cooper. Schema del circuito e livelli illustrativi.

Descrizione qualitativa. Il circuito reale conserva perdite residue. Koch et al., Phys. Rev. A 76, 042319 (2007).

Il qubit costruito su un chip

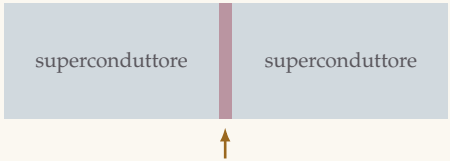
Nel transmon le due superfici metalliche realizzano la capacità, mentre la piccola giunzione controlla il trasferimento fra esse. Insieme formano un oscillatore con livelli non equidistanti. Usiamo i due livelli più bassi come A e B, mantenendo debole l'eccitazione dei livelli superiori.

Un circuito fabbricato sul chip



due superfici metalliche
formano una capacità elettrica

Ingrandimento della giunzione



barriera isolante molto sottile

Schema di un transmon. La barriera costituisce una giunzione Josephson; proporzioni illustrative.

Il disegno collega componente e funzione; proporzioni illustrative. Koch et al., Phys. Rev. A 76, 042319 (2007).

Scegliere due livelli fra quelli del circuito

Confrontiamo due strutture energetiche usando la stessa scala. A sinistra i salti sono uguali; a destra il salto A/B differisce dal successivo. Una frequenza scelta per A/B, insieme a un impulso abbastanza selettivo, permette di controllare i due livelli del qubit.



Stessa scala verticale. La selettività richiede anche una forma e una durata adeguate dell'impulso.

Livelli illustrativi con spaziature decrescenti, come nel regime transmon. Koch et al., Phys. Rev. A 76, 042319 (2007).

Controllare il circuito con le microonde

Sul chip il controllo può arrivare attraverso una linea elettrica sotto forma di impulso a microonde. Il campo del segnale agisce sulla transizione A/B. Ritroviamo le regolazioni già utilizzate per lo ione: frequenza, intensità, durata e fase dell'impulso determinano la trasformazione.

Generatore a microonde



Stato dopo l'impulso



frequenza: transizione scelta durata
e intensità: entità della trasformazione

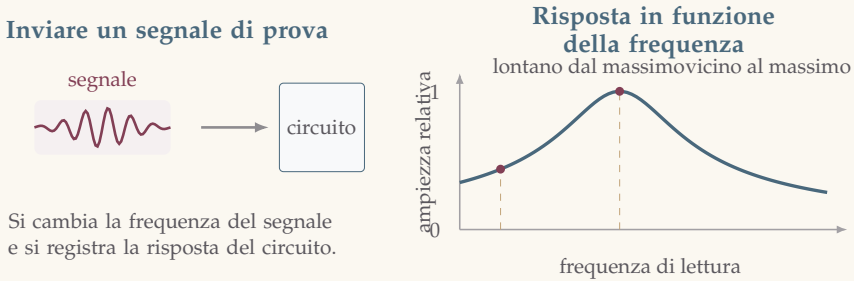
fase: riferimento per la relazione fra le ampiezze

Le microonde sono onde elettromagnetiche a frequenza più bassa della luce visibile.

Kjaergaard et al., Annu. Rev. Condens. Matter Phys. (2020).

Il risonatore di lettura

Un risonatore risponde maggiormente vicino a una frequenza caratteristica. I due punti confrontano la risposta lontano e vicino al massimo. Il collegamento al qubit sposta questa frequenza in modo diverso per A e B: il confronto con risposte calibrate permetterà la lettura.

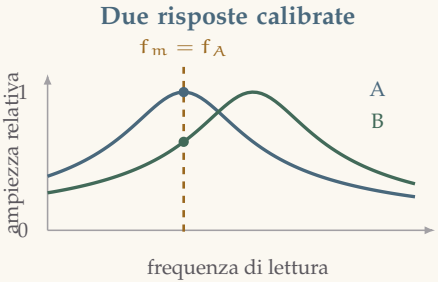


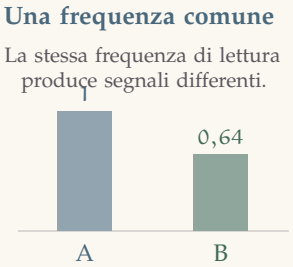
Curva teorica di ampiezza, normalizzata; entrambi i punti sono sullo stesso grafico.

Schema qualitativo della presentazione; Schuster et al., Phys. Rev. Lett. 94, 123602 (2005).

Scegliere una frequenza per distinguere A e B

Prepariamo A e B separatamente e misuriamo le risposte del risonatore. Una stessa frequenza di interrogazione attraversa entrambe le curve: le intersezioni indicano due ampiezze differenti. Questi valori forniscono il riferimento per la lettura.



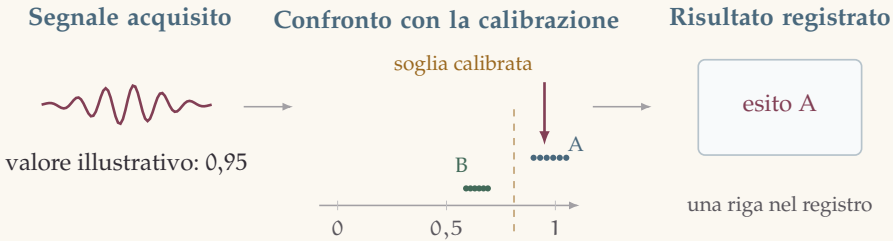


La linea verticale attraversa entrambe le curve. Le barre riportano i valori calcolati su quella linea.

Curve teoriche normalizzate; centri separati di 1,2 larghezze caratteristiche. Schuster et al., Phys. Rev. Lett. 94, 123602 (2005).

Leggere lo stato attraverso una risposta elettrica

Il circuito di lettura acquisisce il segnale e ne confronta il valore con quelli ottenuti preparando A e B. Nell'esempio, un valore vicino alla risposta calibrata di A viene registrato come A. Ripetendo l'esecuzione costruiamo le frequenze dei risultati.

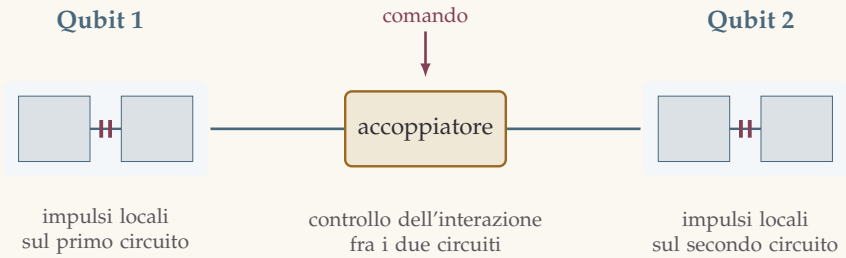


Punti e soglia sono illustrativi. Le prove di calibrazione servono a stimare anche gli errori di classificazione.

Ampiezza illustrata; la lettura può usare anche la fase. Schuster et al., Phys. Rev. Lett. 94, 123602 (2005).

Realizzare una porta fra due circuiti

Anche sul chip serve un collegamento fisico per le operazioni di coppia. In una possibile architettura, un elemento intermedio regola l'interazione fra due circuiti. Il comando dell'accoppiatore e gli impulsi locali vengono coordinati per realizzare una trasformazione congiunta nel tempo assegnato.

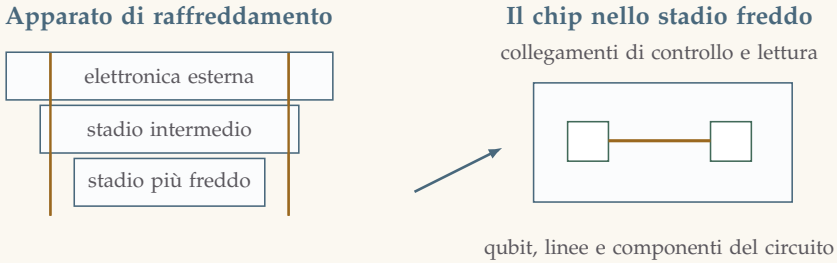


Una possibile architettura usa un accoppiatore regolabile.
Altre realizzano porte con collegamenti differenti.

Kjaergaard et al., Annu. Rev. Condens. Matter Phys. (2020).

Il chip e le condizioni che ne permettono il controllo

Il chip occupa una piccola regione dello stadio più freddo dell'apparato. Il raffreddamento limita le eccitazioni termiche; cavi, filtri e amplificatori collegano il processore all'elettronica esterna. La vista ingrandita permette di riconoscere dove agiscono i segnali che preparano, controllano e leggono il qubit.



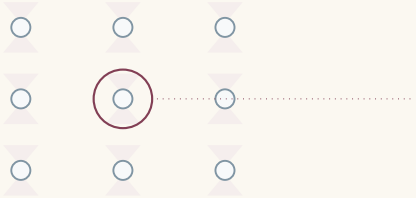
Schema gerarchico, senza scale geometriche o valori di temperatura. I collegamenti devono limitare il rumore che raggiunge il processore.

Koch et al., progetto del transmon, 2007. Schema qualitativo.

Atomi neutri trattenuti dalla luce

Anche un atomo complessivamente neutro risponde al campo elettrico della luce: la distribuzione delle sue cariche si modifica. Con frequenza e geometria opportune, il fascio concentrato esercita una forza che lo trattiene vicino al fuoco. Ogni punto del disegno è una trappola; il qubit usa due stati interni dell'atomo.

Una disposizione di atomi



La luce crea il confinamento



Le trappole ottiche sono spesso chiamate pinzette ottiche. La figura amplia il punto di confinamento.

Bluvstein et al., Nature (online 2023; volume 2024).

Quando un atomo diventa molto eccitato

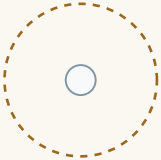
Un impulso può portare un elettrone dell'atomo in uno stato di alta energia, con distribuzione spaziale più estesa. Questi sono gli stati di Rydberg. L'interazione con gli atomi vicini cresce e può essere usata durante una porta. Alla fine della sequenza si ritorna ai livelli scelti per il qubit.

Atomo ordinario



l'elettrone resta relativamente vicino al nucleo

Stato molto eccitato



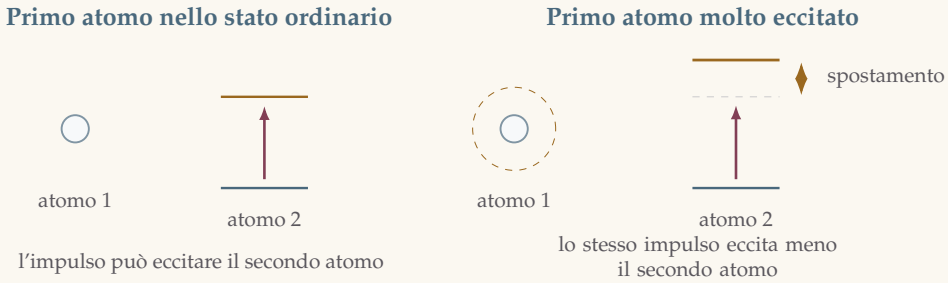
Stato elettronico più esteso; interazione più forte con i vicini.

Questi stati estesi sono chiamati stati di Rydberg. Il disegno mostra solo l'idea di aumento della portata.

Introduzione qualitativa agli stati di Rydberg. Bluvstein et al., Nature (online 2023; volume 2024).

Attivare un'interazione fra atomi neutri

L'eccitazione simultanea di due atomi vicini può richiedere un'energia diversa da quella prevista per due atomi isolati. Dopo aver eccitato il primo, lo stesso laser diventa meno efficace sul secondo: è il blocco di Rydberg. Una sequenza controllata sfrutta questa risposta condizionata e riporta gli atomi nei livelli del qubit.



Principio del blocco di Rydberg: l'eccitazione di un atomo modifica la risposta dell'altro.

Il disegno illustra una possibile base fisica delle porte. Bluvstein et al., Nature (online 2023; volume 2024).

Confinare un elettrone in un semiconduttore

Nel semiconduttore gli elettrodi regolano l'energia necessaria a collocare un elettrone nelle diverse regioni. Una piccola regione favorevole lo confina e viene chiamata punto quantico. Il supporto è così localizzato; A e B descriveranno due stati del suo spin, la proprietà quantistica associata al comportamento magnetico.

Una piccola regione nel semiconduttore



gli elettrodi creano una regione in cui resta un solo elettrone

Stati di spin per il qubit

La posizione serve a tenere fermo il supporto.

Gli stati A e B sono due orientazioni dello spin.

Lo spin è una proprietà magnetica dell'elettrone.

Schema di un quantum dot. La geometria reale dipende dal materiale e dal dispositivo.

Schema di un quantum dot. Burkard et al., Rev. Mod. Phys. (2023).

Usare lo spin come due stati del qubit

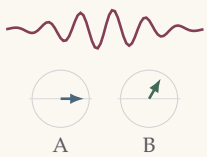
In presenza di un campo magnetico scegliamo due stati di spin come A e B. Un segnale oscillante può modificarne le ampiezze. Il principio di controllo riprende quello degli ioni e dei circuiti: preparare lo stato, applicare un impulso calibrato e misurare.

Due stati magnetici di riferimento



Le frecce indicano gli stati magnetici scelti rispetto al campo applicato.

Un impulso trasforma lo stato



Il comando modifica le ampiezze e la loro relazione di fase.

A sinistra: riferimenti di spin. A destra: ampiezze del qubit. Il disegno non rappresenta una rotazione meccanica.

Lo spin è una proprietà quantistica legata al magnetismo dell'elettrone. Burkard et al., Rev. Mod. Phys. (2023).

Trasformare lo spin in un segnale elettrico

Il campo magnetico separa le energie dei due stati dello spin. Regoliamo la barriera verso una regione vicina affinché, durante la lettura, l'elettrone possa uscire soprattutto da uno dei due stati. Il sensore rileva il cambiamento di carica. Una calibrazione associa quindi il segnale ottenuto ad A oppure B.



Questo tipo di lettura è distruttivo per la singola esecuzione, ma produce un esito registrabile.

Esempio di conversione spin–carica. Burkard et al., Rev. Mod. Phys. (2023).

Fotoni: ritrovare interferometri e rivelatori

La luce codifica un qubit nella polarizzazione oppure in due percorsi. Un circuito trasforma e ricombina le ampiezze prima della misura. Le operazioni fra più qubit possono utilizzare fotoni aggiuntivi, rivelazioni e comandi condizionati agli esiti.

Un qubit in due percorsi ottici



guide, divisori e fase trasformano le ampiezze

Passare a più qubit

Ulteriori fotoni e rivelatori

Operazioni condizionate agli esiti

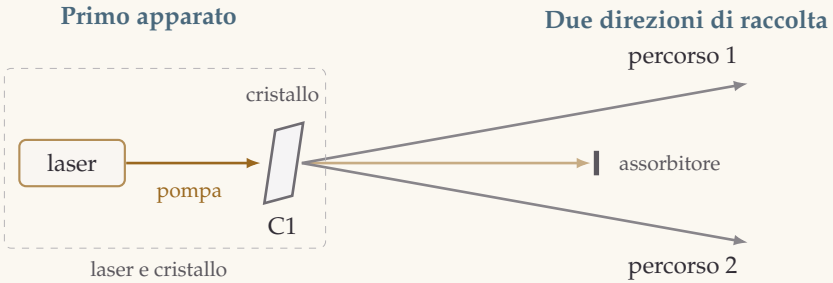
Controllo elettronico

È disegnato un singolo qubit di percorso. Le operazioni congiunte richiedono risorse e procedure ulteriori.

Knill, Laflamme e Milburn, Nature (2001). Sorgente fotonica | Calibrazione

Una sorgente da costruire

Un laser illumina un cristallo BBO: il fascio, chiamato pompa, fornisce energia alla produzione di coppie. Seguiremo raccolta, rivelazione e letture della polarizzazione. Dopo il confronto fra le preparazioni torneremo nel cristallo per spiegare le condizioni del modello. L'approfondimento si conclude con il calcolo dei conteggi attesi.

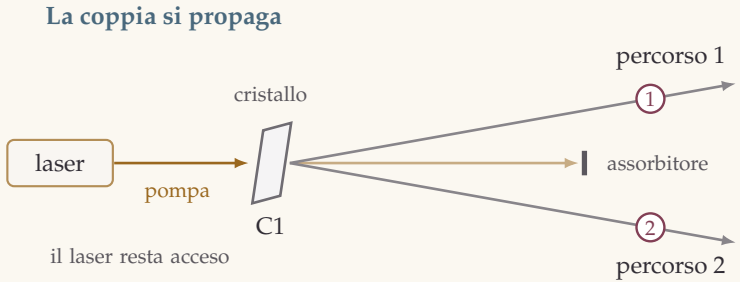


Schema del banco: 1 e 2 indicano i percorsi raccolti. Angoli e distanze illustrativi.

Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 898 (2002). Cristallo | Calibrazione

Una conversione produce una coppia

Nel cristallo l'energia di un quanto della pompa può alimentare la produzione di due fotoni. Seguiamo un evento: un fotone prosegue verso ciascuna apertura scelta. Il laser resta acceso anche negli intervalli senza coppie. Le due frecce individuano i percorsi raccolti; rappresentano la coppia di un singolo evento.

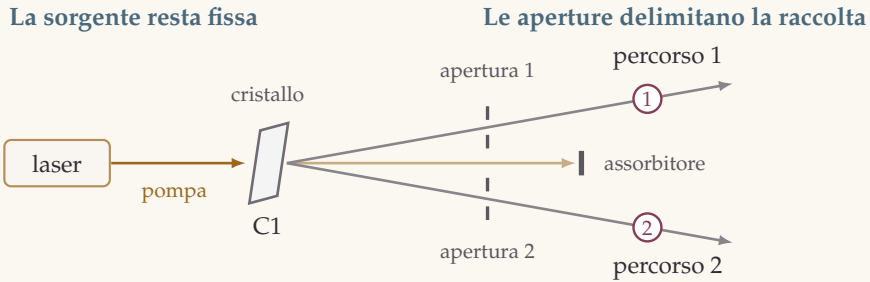


Punto rosso: conversione nel cristallo. Dischetti numerati: fotoni della coppia seguita.

Schema di una coppia nei percorsi raccolti. Kwiat et al., Phys. Rev. A 60, R773 (1999).

Raccogliere sempre le stesse uscite

Due aperture selezionano le direzioni in cui raccogliamo fotoni della stessa coppia. I numeri 1 e 2 identificano questi percorsi. Manteniamo fisse le aperture durante le prove, così da confrontare sempre le stesse uscite della sorgente.

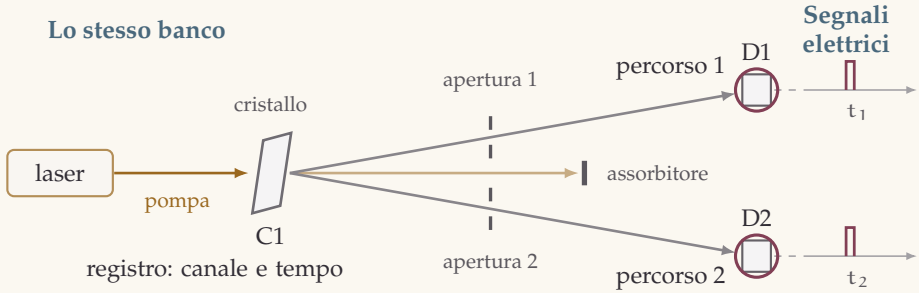


Le aperture delimitano due direzioni correlate. Lenti e filtri sono omessi in questa vista.

Selezione geometrica della raccolta. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 898 (2002).

Dal fotone al segnale registrato

Ogni percorso termina con un rivelatore. Quando D1 o D2 rivela un fotone, produce un breve impulso elettrico; il computer registra il canale e il tempo. Nel disegno compaiono entrambi i segnali della prova. Confrontare i due tempi consente di cercare le rivelazioni associate. I tempi sono dati strumentali, da correggere per i ritardi fissi dei canali.

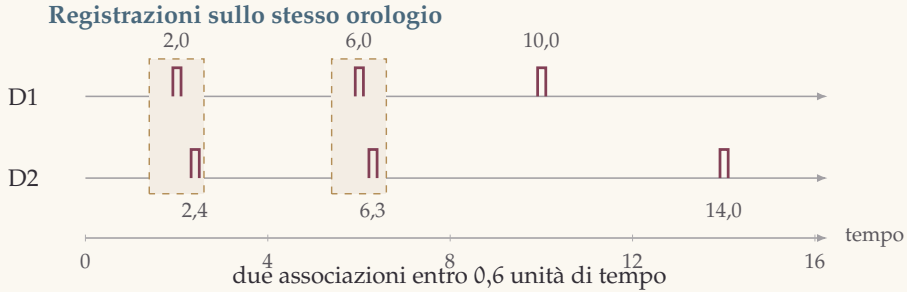


Linee continue: cammini ottici. Linee tratteggiate: collegamento ai segnali elettrici.

Rivelazione degli arrivi; analisi H/V ancora assente. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 898 (2002).

Associare due segnali: la coincidenza

I due registri usano lo stesso orologio e tempi corretti per i ritardi fissi. Nell'esempio associamo segnali con differenza temporale al più 0,6: le coppie 2,0/2,4 e 6,0/6,3 soddisfano il criterio, mentre 10,0 e 14,0 restano spaiate. La coincidenza è un'associazione candidata; segnali indipendenti possono entrare nella stessa finestra.



Tempi in unità convenzionali, già corretti per i ritardi fissi. Dati illustrativi.

Finestra scelta per un esempio numerico illustrativo. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 898 (2002).

Dai segnali al registro delle coppie

Il registro delle coincidenze conserva entrambi i tempi e la loro differenza. Le due righe hanno scarti 0,4 e 0,3, entro la soglia 0,6, e vengono accettate come associazioni candidate. I segnali a 10,0 e 14,0 restano spaiati. Sono gli stessi sei segnali della cronologia; le nuove prove aggiungeranno i risultati dell'analisi di polarizzazione.

Sei segnali registrati

canale	tempo
D1	2,0
D2	2,4
D1	6,0
D2	6,3
D1	10,0
D2	14,0

Due coincidenze candidate

t_1	t_2	differenza
2,0	2,4	0,4
6,0	6,3	0,3

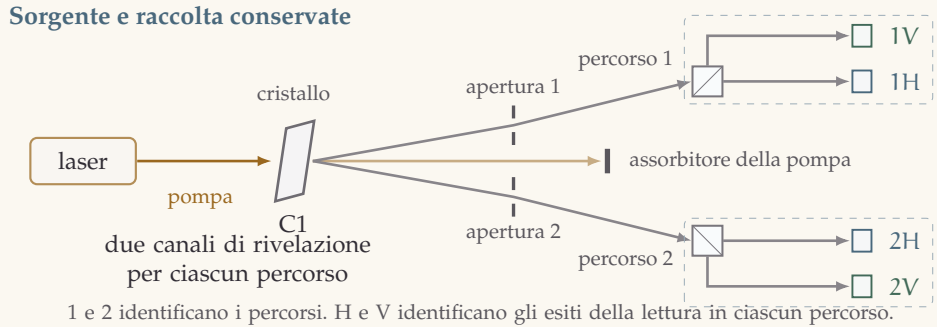
le registrazioni a 10,0 e 14,0 restano spaiate con la soglia scelta

Ogni riga associa due segnali. Nelle prove successive analizzeremo la polarizzazione di nuove coppie.

Calcolo dai dati mostrati: soglia 0,6; due associazioni. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 898 (2002).

Aggiungere la lettura della polarizzazione

Il registro delle coincidenze ci ha permesso di associare gli arrivi nei percorsi 1 e 2. Aggiungiamo ora un separatore H/V e due rivelatori in ciascun percorso. Ogni segnale avrà un tempo di arrivo e un'etichetta di polarizzazione. La sorgente e le aperture rimangono nelle stesse posizioni.

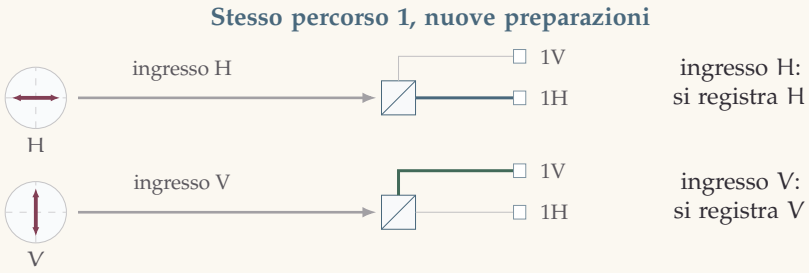


1 e 2 identificano i percorsi. H e V identificano gli esiti della lettura in ciascun percorso.

Analisi H/V fissa; lenti e filtri omessi nello schema. Kwiat et al., Phys. Rev. A 60, R773 (1999).

Un separatore, due esiti

Confrontiamo due ingressi nel percorso 1. Un fotone H viene diretto a 1H e il programma registra H; un fotone V viene diretto a 1V e si registra V. Il separatore resta fisso. Ciascuna riga rappresenta una nuova preparazione, seguita da una sola rivelazione ideale.

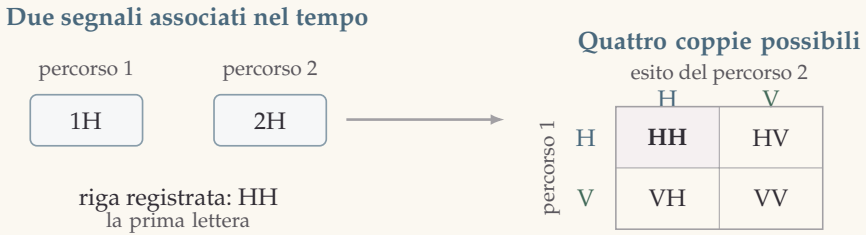


Nel percorso 2 si usano gli stessi criteri e i canali 2H e 2V.

Stessa convenzione del banco a due cristalli. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 898 (2002).

Registrare due esiti di polarizzazione

Il criterio temporale resta quello già applicato ai registri. Quando associamo un segnale di 1H a uno di 2H, scriviamo HH nella stessa riga. Le quattro caselle raccolgono tutte le combinazioni dei due risultati possibili.

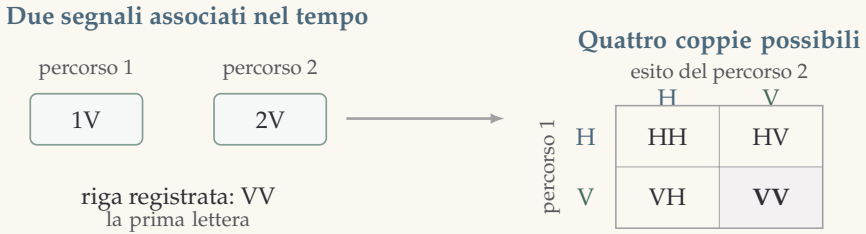


Schema di classificazione. Ogni esempio associa un segnale del percorso 1 a uno del percorso 2.

Associazione fra canali nella finestra di coincidenza; caratterizzazione del fondo trattata più avanti. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 898 (2002).

Registrare due esiti di polarizzazione

Una coincidenza fra 1V e 2V viene registrata come VV. Le caselle HV e VH raccolgono i due casi con risultati differenti. Possiamo ora confrontare le tabelle prodotte da diverse preparazioni della sorgente, mantenendo invariata questa lettura.

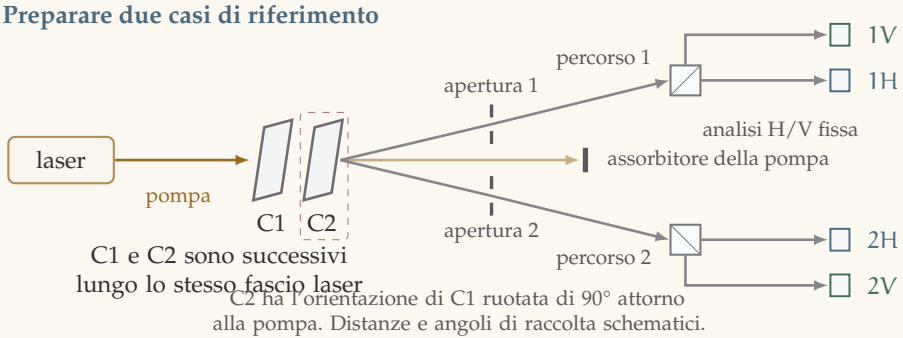


Schema di classificazione. Ogni esempio associa un segnale del percorso 1 a uno del percorso 2.

Associazione fra canali nella finestra di coincidenza; caratterizzazione del fondo trattata più avanti. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 898 (2002).

Aggiungere il secondo cristallo

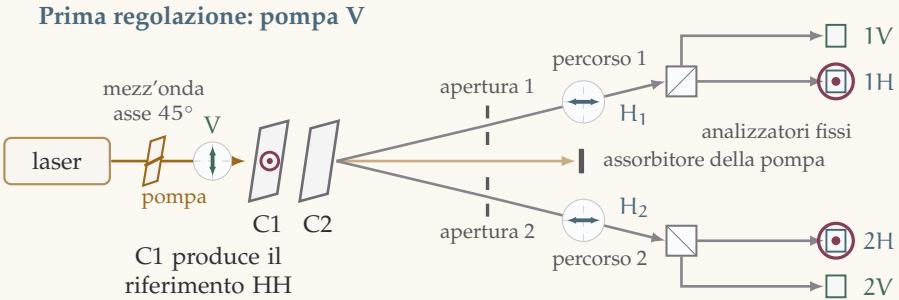
Gli analizzatori distinguono le polarizzazioni delle coppie raccolte. Prepariamo due riferimenti, HH e VV, ponendo C2 dopo C1 lungo la stessa pompa. Le orientazioni dei cristalli selezionano conversioni differenti. Nelle prove successive restano fissi i due percorsi di raccolta, le aperture e i quattro rivelatori.



Tipo I: i due fotoni prodotti hanno la stessa polarizzazione. Kwiat et al., Phys. Rev. A 60, R773 (1999).

Prima prova: la pompa in V

Una mezz'onda con asse a 45° trasforma la pompa da H a V. Nella convenzione scelta, V alimenta la conversione in C1 e produce il contributo HH; C2 rimane nel banco. Con la lettura H/V, una coppia ideale raccolta conduce a 1H e 2H. La stessa regolazione viene ripetuta per costruire il registro di riferimento.



La lamina della pompa riceve H. I dischi sono viste frontali; il rosso evidenzia l'evento o i segnali.

Previsioni condizionate a una coppia raccolta; componenti ideali e fondo assente. Kwiat et al., Phys. Rev. A 60, R773 (1999).

Dalle coppie HH alla tabella

Con la pompa in V, il registro illustrativo contiene sei coincidenze HH. I conteggi, nell'ordine HH, HV, VH, VV, sono $(6, 0, 0, 0)$. Dividendo per sei otteniamo le frequenze $(1, 0, 0, 0)$, coincidenti in questo riferimento ideale con le probabilità teoriche. Ogni riga proviene da una nuova coppia.

Sei coppie del riferimento

coppia	percorso 1	percorso 2
1	H	H
2	H	H
3	H	H
4	H	H
5	H	H
6	H	H

pompa V; stessa lettura H/V

Frequenze H/V

esito del percorso 2

percorso 1	H	V
H	100%	0%
V	0%	0%

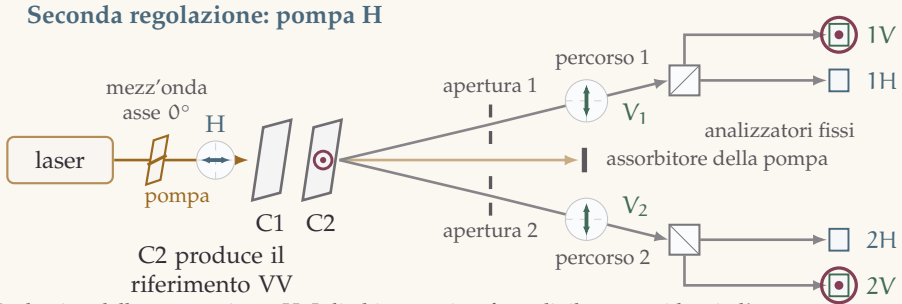
$6/6 = 100\%$

Campione illustrativo del riferimento ideale. La tabella conta esattamente le righe mostrate.

Riferimento HH; separatori ideali. Kwiat et al., Phys. Rev. A 60, R773 (1999). Registro e conteggi didattici.

Seconda prova: la pompa in H

Ruotiamo soltanto la mezz'onda della pompa: con asse a 0°, l'ingresso H resta H. Questa componente alimenta C2 e produce il contributo VV. Cristalli, aperture e analizzatori conservano le posizioni precedenti. Una coppia ideale raccolta raggiunge 1V e 2V: il programma registra VV.



La lamina della pompa riceve H. I dischi sono viste frontali; il rosso evidenzia l'evento o i segnali.

Previsioni condizionate a una coppia raccolta; componenti ideali e fondo assente. Kwiat et al., Phys. Rev. A 60, R773 (1999).

Dalle coppie VV alla tabella

Con la pompa in H, le sei righe del registro illustrativo contengono VV. I conteggi sono $(0, 0, 0, 6)$ nell'ordine HH, HV, VH, VV. Dividendo per sei si ottengono le frequenze $(0, 0, 0, 1)$. La struttura della tabella è la stessa del riferimento HH; cambia la preparazione e quindi la casella occupata.

Sei coppie del riferimento

coppia	percorso 1	percorso 2
1	V	V
2	V	V
3	V	V
4	V	V
5	V	V
6	V	V

pompa H; stessa lettura H/V

Frequenze H/V

esito del percorso 2

percorso 1	H	V
H	0%	0%
V	0%	100%

$6/6 = 100\%$

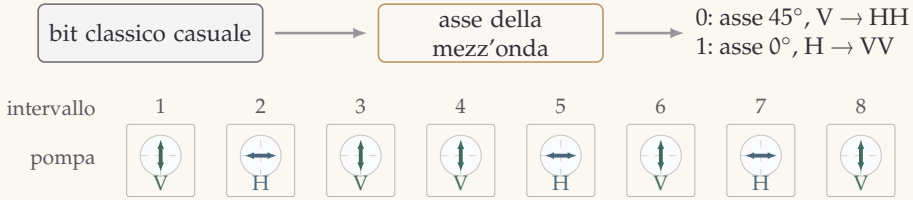
Campione illustrativo del riferimento ideale. La tabella conta esattamente le righe mostrate.

Riferimento VV; separatori ideali. Kwiat et al., Phys. Rev. A 60, R773 (1999). Registro e conteggi didattici.

Scegliere la preparazione con un bit casuale

Prima di ogni intervallo di acquisizione, il computer sceglie 0 oppure 1 con uguale probabilità. Il bit regola la mezz'onda: asse a 45° per la pompa V, asse a 0° per H. La regolazione resta fissa durante l'intervallo e prepara il riferimento corrispondente.

Un comando prima di ogni intervallo



acquisizione a regolazione fissa; poi una nuova scelta

Esempio di otto comandi. La produzione della coppia resta occasionale in ciascun intervallo.

Protocollo classico illustrativo costruito dai due riferimenti. Kwiat et al., Phys. Rev. A 60, R773 (1999).

Il registro della scelta casuale

Il registro illustrativo contiene cinque HH e tre VV, prodotti dai corrispondenti comandi sulla pompa. I conteggi sono $(5, 0, 0, 3)$ e le frequenze $(5/8, 0, 0, 3/8)$. Ogni intervallo mostrato ha fornito una coincidenza. Il campione sintetico va distinto dalla previsione teorica su molte ripetizioni.

Registro illustrativo

intervallo	pompa	coppia
1	V	HH
2	H	VV
3	V	HH
4	V	HH
5	H	VV
6	V	HH
7	H	VV
8	V	HH

Conteggi H/V

esito del percorso 2

percorso 1	H	V
H	5	0
V	0	**3**

nel campione: 5/8 HH e 3/8 VV

Realizzazione illustrativa con una coincidenza per intervallo. Un campione finito può avere conteggi diversi.

Registro sintetico, raccolta e lettura ideali. Conteggi ricavati dai comandi e dagli esiti mostrati.

Combinare le previsioni dei due riferimenti

Supponiamo uguale durata di acquisizione e uguale tasso di coincidenze per le due regolazioni. Le coppie HH e VV hanno allora pesi attesi uguali. Per ciascun esito prendiamo metà della probabilità prevista con la pompa V e metà di quella prevista con la pompa H.

Stessa lettura H/V per le due regolazioni

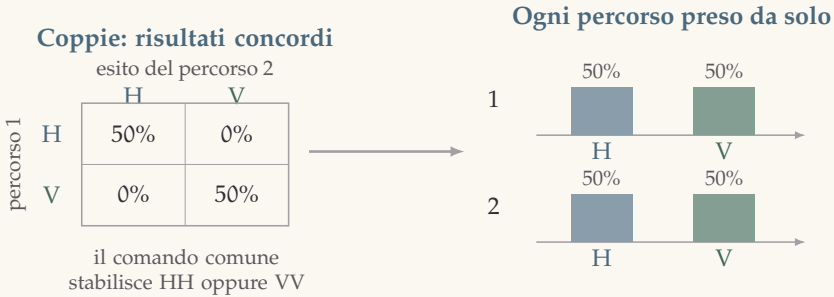
esito	con pompa V riferimento HH		con pompa H riferimento VV		scelta casuale con pesi uguali
HH	$0{,}5 \times 1$	+	$0{,}5 \times 0$	=	50%
HV	$0{,}5 \times 0$	+	$0{,}5 \times 0$	=	0%
VH	$0{,}5 \times 0$	+	$0{,}5 \times 0$	=	0%
VV	$0{,}5 \times 0$	+	$0{,}5 \times 1$	=	50%

Il fattore $1/2$ pesa le due preparazioni. Le probabilità finali sommano a 1.
Pesi uguali tra le coppie raccolte: stessa durata utile
e stesso tasso di coincidenze per le due regolazioni.

Calcolo di una scelta casuale classica fra due preparazioni di polarizzazione. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 903 (2002).

Coppie concordi da una scelta comune

Il comando comune prepara HH oppure VV. Con contributi raccolti di uguale peso, ciascun percorso dà H e V con probabilità 1/2, mentre la coppia è sempre concorde. Questa tabella costituisce il riferimento. Ora manterremo fissa la pompa a 45° e confronteremo la risposta dello stesso apparato.

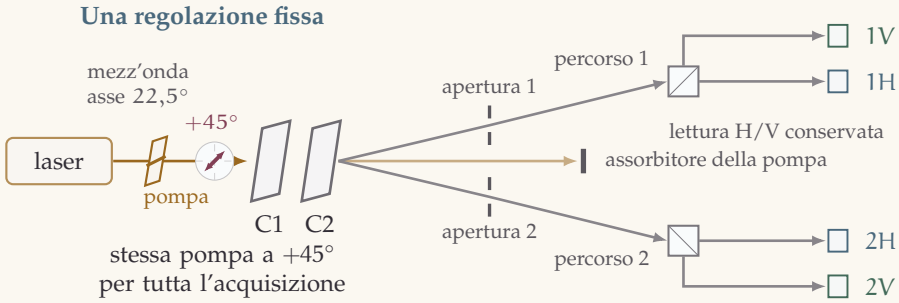


Probabilità del modello ideale. Il riferimento riguarda una scelta casuale di polarizzazioni HH o VV.

Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 903 (2002).

Mantenere la pompa a 45°

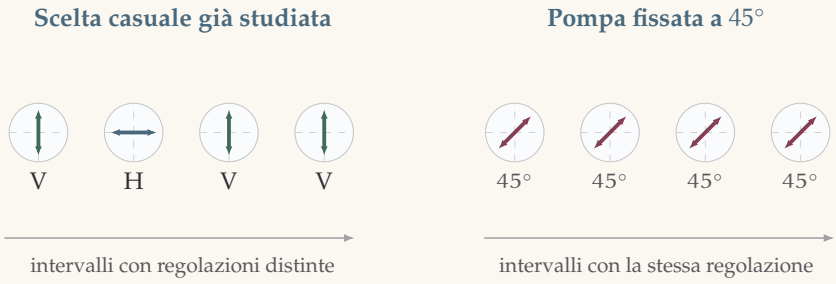
Dopo il riferimento casuale fissiamo la mezz'onda della pompa a 22,5°. L'ingresso H diventa +45° e questa regolazione rimane invariata durante l'acquisizione. Cristalli, aperture e analizzatori sono gli stessi. Seguiamo come le due componenti della pompa alimentano la preparazione della coppia.



Pompa bilanciata nel caso di uguale efficienza dei due contributi. Kwiat et al., Phys. Rev. A 60, R773 (1999).

Due componenti della stessa pompa

Nel riferimento precedente ogni intervallo utilizzava H oppure V, secondo il comando del computer. Con la nuova regolazione ogni intervallo utilizza invece la stessa polarizzazione a 45°. La preparazione del fascio rimane costante.



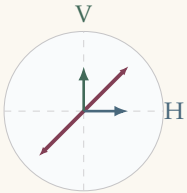
I dischi rappresentano la preparazione della pompa, prima del cristallo.

Richiamo alle componenti del campo già introdotte con le lamine. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 903 (2002).

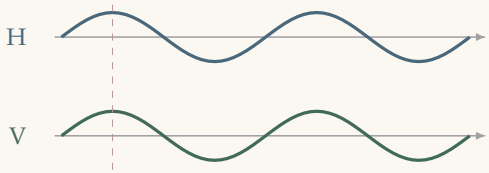
Due componenti della stessa pompa

Ingrandiamo la vista frontale della pompa a 45°. Le componenti H e V hanno uguale ampiezza e oscillano in fase. Sono due componenti del medesimo campo, come nella costruzione della polarizzazione lineare già studiata.

Vista frontale della pompa



Le componenti nel tempo



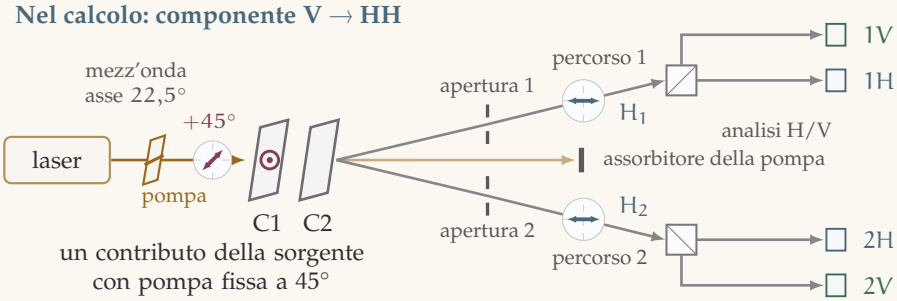
massimi e minimi agli stessi istanti

Curve qualitative nello stesso punto del fascio. In rosso: direzione risultante o istante selezionato.

Richiamo alle componenti del campo già introdotte con le lamine. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 903 (2002).

Seguire i due contributi alla conversione

Manteniamo la pompa a 45° e isoliamo nel calcolo il contributo della componente V. Nella convenzione già utilizzata, essa alimenta la conversione in C1 e il contributo HH nei percorsi 1 e 2. Il banco resta invariato.

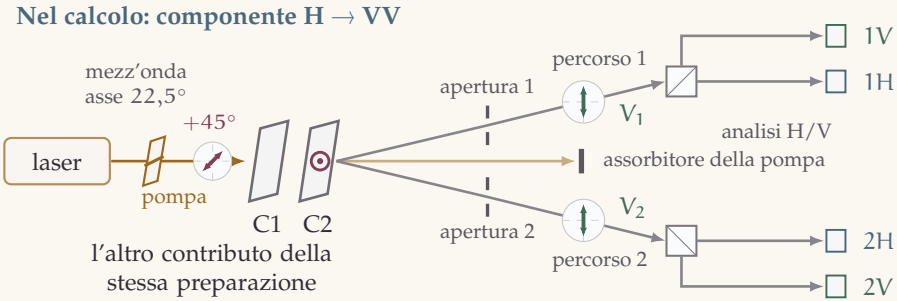


Si mostra un contributo alla volta. Ciascuno riguarda una coppia negli stessi percorsi 1 e 2.

Diagrammi dei contributi; nessuna osservazione del cristallo di origine. Kwiat et al., Phys. Rev. A 60, R773 (1999).

Seguire i due contributi alla conversione

La componente H della stessa pompa alimenta il contributo VV prodotto da C2. Le due figure descrivono i due termini della preparazione. Per calcolare una misura successiva dovremo conservarne le ampiezze e la relazione di fase.

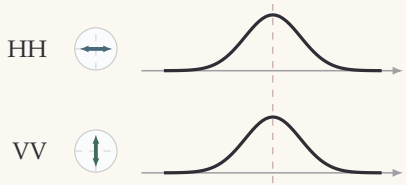


Diagrammi dei contributi; nessuna osservazione del cristallo di origine. Kwiat et al., Phys. Rev. A 60, R773 (1999).

Le condizioni della raccolta ideale

Per il primo calcolo assumiamo che HH e VV abbiano la stessa descrizione dei tempi, delle frequenze e delle posizioni, comprese le relazioni fra i due fotoni. Resta diversa la polarizzazione. Il profilo disegnato illustra una sola di queste proprietà. L'approfondimento sul cristallo esaminerà come controllare questa ipotesi.

Ingrandimento di un percorso raccolto



stessa scala temporale

Condizione usata nel confronto

La polarizzazione cambia.
Le altre proprietà raccolte
sono sovrapposte.

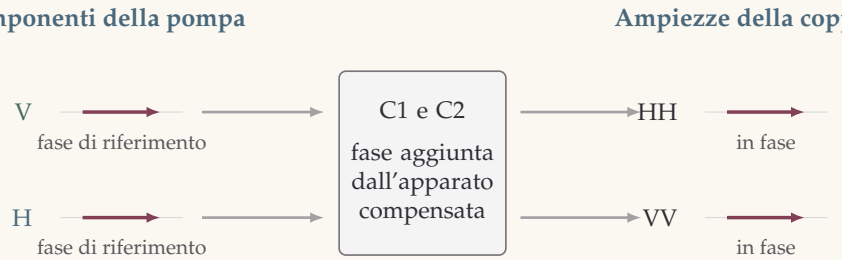
Allineamento e compensazione
saranno esaminati dopo
il confronto delle letture.

Il profilo mostra una sola proprietà. L'ipotesi riguarda tutte le altre proprietà della coppia e le loro fasi.

Kwiat et al., Phys. Rev. A 60, R773 (1999).

La fase della pompa entra nella coppia

Le componenti della pompa sono in fase. I due processi di conversione trasferiscono questa relazione alle ampiezze HH e VV, aggiungendo una fase dovuta alla propagazione. Nel caso illustrato l'apparato è calibrato affinché la fase finale della coppia sia zero.

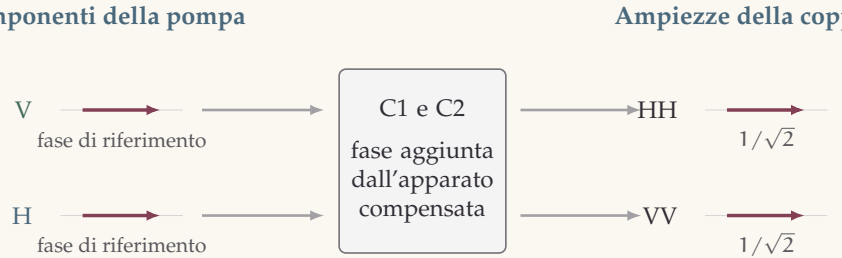


Frecce = ampiezze. Quelle della coppia sono normalizzate alla raccolta di una coppia.

Kwiat et al., Phys. Rev. A 60, R773 (1999).

La fase della pompa entra nella coppia

Condizioniamo il calcolo alla produzione di una coppia nei percorsi raccolti. Le ampiezze bilanciate hanno modulo $1/\sqrt{2}$; i loro quadrati sommano a uno. Le probabilità $1/2$ descrivono la polarizzazione di quella coppia. La frequenza con cui il laser produce una coppia è una quantità distinta.



Frecce = ampiezze. Quelle della coppia sono normalizzate alla raccolta di una coppia.

Kwiat et al., Phys. Rev. A 60, R773 (1999).

La prima lettura: H e V

La prima lettura usa ancora gli assi H/V. HH e VV conducono a caselle differenti: il quadrato di ciascuna ampiezza $1/\sqrt{2}$ vale $1/2$. Le altre due probabilità sono nulle. La tabella coincide con quella della scelta casuale bilanciata; questa lettura lascia indistinta la relazione di fase fra i contributi.



HH e VV sono esiti differenti in questa lettura: si calcolano due probabilità separate.

Calcolo della lettura H/V per il modello coerente bilanciato. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 903 (2002).

La tabella H/V lascia aperte due descrizioni

La sorgente comandata dal bit casuale e quella con pompa fissa producono la stessa previsione nella lettura H/V. La prima prepara HH oppure VV; la seconda conserva due ampiezze con una fase relativa. Per confrontarle cambiamo la lettura, usando le lamine già studiate.

Scelta casuale HH/VV

percorso 1 \ percorso 2	H	V
H	50%	0%
V	0%	50%

due preparazioni alternative con pesi 1/2

Pompa fissa, fase calibrata

percorso 1 \ percorso 2	H	V
H	50%	0%
V	0%	50%

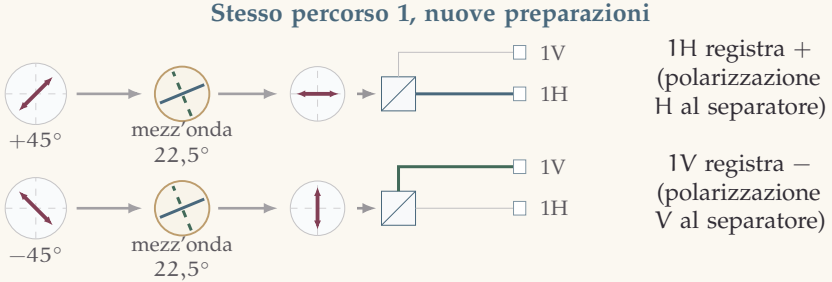
due contributi nella stessa preparazione coerente

Stessa raccolta e lettura H/V. Entrambi i modelli sono compatibili con questa tabella.

Confronto fra le due sorgenti di polarizzazione dichiarate. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 903 (2002).

Leggere le diagonali con la lamina

Inseriamo la mezz'onda a 22,5° davanti al separatore del percorso 1. L'ingresso a +45° diventa H e raggiunge 1H; quello a −45° diventa V e raggiunge 1V. A questi canali associamo gli esiti + e − dell'analisi diagonale.

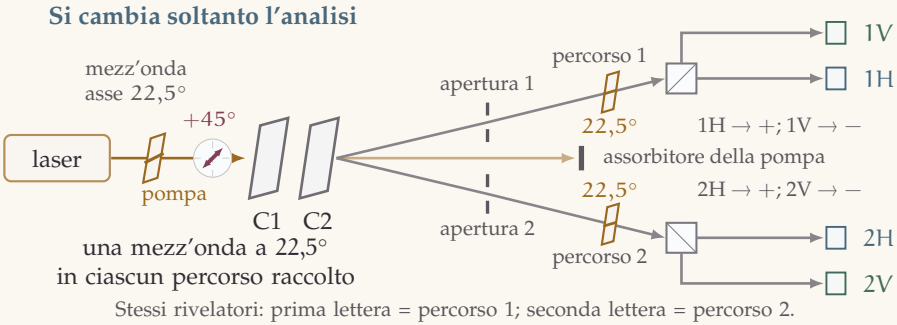


La mezz'onda converte le due diagonali nelle direzioni H e V prima della rivelazione.

Trasformazioni della mezz'onda già studiate; Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 903 (2002).

La stessa analisi nei due percorsi

Aggiungiamo la stessa mezz'onda anche nel percorso 2. Per ciascuna coppia registriamo ora $++$, $+-$, $-+$ oppure $--$. La sorgente resta fissa durante questa acquisizione. Il confronto con la precedente lettura H/V utilizza nuove coppie preparate nello stesso modo.

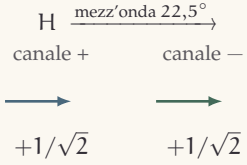


Apparato ideale: due mezz'onde seguite da separatori di polarizzazione. Kwiat et al., Phys. Rev. A 60, R773 (1999).

Le ampiezze della lettura diagonale

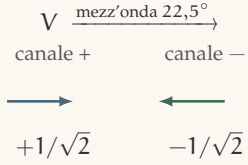
Per H, le ampiezze verso + e − sono entrambe $1/\sqrt{2}$. Per V, hanno lo stesso modulo e segni opposti. Ogni ingresso dà probabilità $1/2$ per ciascun risultato. La differenza di segno va conservata quando si combinano i contributi della coppia.

Nuova preparazione: H



Probabilità $1/2$ per ciascun canale.
Ampiezze in fase.

Nuova preparazione: V



Probabilità $1/2$ per ciascun canale.
Mezzo ciclo di fase relativa.

Il segno delle ampiezze interviene nelle somme successive; le probabilità sono i moduli quadrati.

Convenzioni di fase della base, a fase globale irrilevante. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 903 (2002).

La lettura diagonale di una coppia HH

Per l'ingresso di riferimento HH, ottenere ++ richiede + su entrambi i percorsi. Si moltiplicano le ampiezze: $(1/\sqrt{2})(1/\sqrt{2}) = 1/2$, poi si calcola il quadrato, $1/4$. Lo stesso procedimento vale per le altre tre combinazioni. La tabella completa contiene quattro probabilità uguali; ogni prova registra una sola coppia di esiti.

Preparazione di riferimento HH



per ++: prodotto $1/\sqrt{2} \times 1/\sqrt{2} = 1/2$

Probabilità nella lettura diagonale

percorso 1 \ percorso 2	+	−
+	1/4	1/4
−	1/4	1/4

quadrato del modulo: $(1/2)^2 = 1/4$

Coppia HH di riferimento; letture locali ideali e indipendenti.

Calcolo per il riferimento HH. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 903 (2002).

La lettura diagonale di una coppia VV

Per un ingresso V, l'ampiezza dell'esito − ha segno negativo nella convenzione scelta. Con VV moltiplichiamo i due contributi: un solo segno negativo dà un prodotto negativo; due danno un prodotto positivo. I moduli restano 1/2 e le probabilità 1/4.

Con ingresso VV

esito	prodotto	ampiezza
$++$	$+\times+$	$\rightarrow +1/2$
$+-$	$+\times-$	$\leftarrow -1/2$
$-+$	$-\times+$	$\leftarrow -1/2$
$--$	$-\times-$	$\rightarrow +1/2$

Le probabilità del riferimento

percorso 1 \ percorso 2	+	−
+	1/4	1/4
−	1/4	1/4

+ e − nominano gli esiti. Il segno davanti all'ampiezza indica la fase del contributo.

Convenzione delle ampiezze identica alla slide precedente. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 903 (2002).

La previsione della scelta casuale

Nella sorgente casuale ogni intervallo prepara HH oppure VV. Calcoliamo la probabilità di un esito per ciascun riferimento e poi pesiamo le due possibilità con 1/2. Poiché entrambe le tabelle diagonali sono uniformi, anche la loro media assegna 1/4 a ogni coppia di esiti.

Media delle probabilità dei due riferimenti

esito	caso HH		caso VV		scelta casuale
$++$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$	$+$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$	$=$	$\frac{1}{4} = 25\%$
$+-$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$	$+$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$	$=$	$\frac{1}{4} = 25\%$
$-+$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$	$+$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$	$=$	$\frac{1}{4} = 25\%$
$--$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$	$+$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$	$=$	$\frac{1}{4} = 25\%$

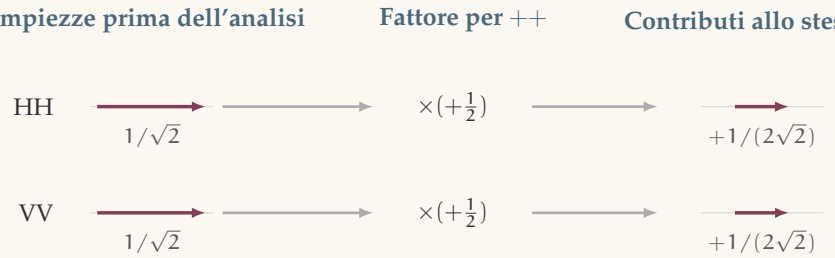
ogni colonna si riferisce alla stessa impostazione dei due analizzatori

I pesi sono uguali tra le coppie raccolte, come nel riferimento casuale.

Calcolo della miscela di polarizzazioni HH/VV; stessa lettura diagonale. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 903 (2002).

Somma dei contributi per l'esito ++

Torniamo alla preparazione coerente e scegliamo un unico risultato finale, ++. Ciascuna ampiezza iniziale vale $1/\sqrt{2}$. L'analisi della coppia fornisce il fattore $+1/2$ sia per HH sia per VV: ciascun contributo all'esito vale quindi $1/(2\sqrt{2})$.

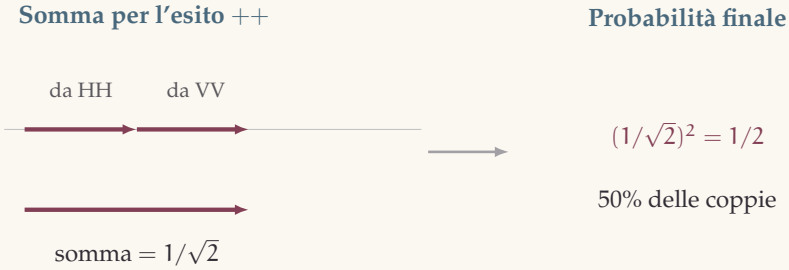


Le due frecce contribuiscono allo stesso esito. La fase iniziale HH/VV è zero.

Calcolo delle ampiezze nella lettura diagonale. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 903 (2002).

Somma dei contributi per l'esito ++

I due contributi arrivano allo stesso esito e sono in fase. Sommiamo le loro frecce: il modulo risultante è $1/\sqrt{2}$. Il suo quadrato dà probabilità $1/2$ per ++. Il calcolo ha conservato la fase fino alla ricombinazione.

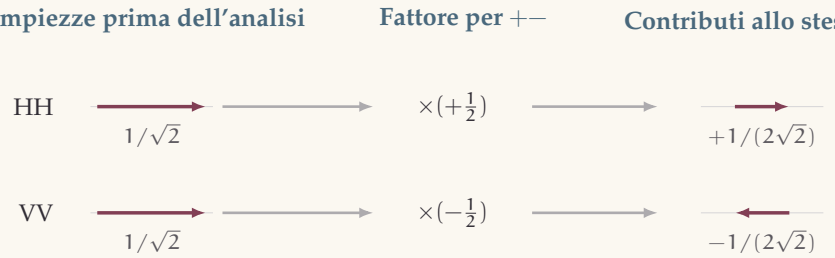


Le due frecce contribuiscono allo stesso esito. La fase iniziale HH/VV è zero.

Calcolo delle ampiezze nella lettura diagonale. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 903 (2002).

Cancellazione dei contributi per l'esito $+-$

Consideriamo ora $+-$. Il contributo da HH contiene il fattore $+1/2$. Quello da VV contiene il fattore $-1/2$, perché il secondo risultato è $-$. Le due ampiezze verso questo stesso esito hanno quindi uguale modulo e segno opposto.



Ampiezze verso lo stesso esito, con uguale modulo e segno opposto.

Calcolo per i due esiti discordi nella preparazione coerente a fase nulla. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 903 (2002).

Cancellazione dei contributi per l'esito $+-$

Nella somma, le due frecce opposte si compensano. L'ampiezza totale di $+-$ è nulla e la sua probabilità è zero nel modello ideale. Anche per $-+$ compare un solo fattore negativo nel contributo VV: il risultato del calcolo è lo stesso.

Somma per l'esito $+-$

da HH



da VV

- somma $= 0$

Probabilità finale

$0^2 = 0$

esito assente nel modello

Ampiezze verso lo stesso esito, con uguale modulo e segno opposto.

Calcolo per i due esiti discordi nella preparazione coerente a fase nulla. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 903 (2002).

Completare la previsione della coppia

Raccogliamo i quattro calcoli. Per $--$, le due ampiezze negative del riferimento VV si moltiplicano e danno un contributo positivo, come per $++$. Rimangono quindi due esiti concordi con probabilità $1/2$ ciascuno. I quattro valori sommano a uno.

Lettura diagonale, fase della sorgente uguale a zero

esito	da HH	da VV	somma	probabilità
$++$	$+\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$+\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$
$+-$	$+\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	0	0
$-+$	$+\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	0	0
$--$	$+\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$+\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$

Per $--$: dal riferimento VV si moltiplicano due fattori negativi.
Si sommano le due ampiezze della riga; poi si calcola il modulo al quadrato.

Probabilità teoriche: analizzatori ideali, nuova coppia a ogni esecuzione. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 903 (2002).

Confrontare le due preparazioni

La lettura diagonale produce previsioni differenti. Nella scelta casuale compaiono anche coppie discordi; nella sovrapposizione a fase nulla le ampiezze di quegli esiti si cancellano. Abbiamo ricavato entrambe le tabelle mantenendo gli stessi analizzatori e cambiando soltanto la preparazione della sorgente.

Scelta casuale HH/VV

percorso 1 \ percorso 2	+	−
+	25%	25%
−	25%	25%

si pesano le probabilità dei due riferimenti

Preparazione coerente, fase 0

percorso 1 \ percorso 2	+	−
+	50%	0%
−	0%	50%

si sommano le ampiezze per ciascun esito finale

H/V dava la stessa tabella; l'analisi diagonale distingue le due previsioni.

Confronto fra due modelli specificati; assenza di fondo e uguali efficienze. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 903 (2002).

Dalla previsione al registro delle coincidenze

Ogni riga registra una nuova coppia. Nel campione coerente si contano cinque $++$ su otto: la frequenza è $5/8 = 62{,}5\%$, a fronte di una probabilità teorica del 50%. Un campione finito può scostarsi dalla previsione. Per un confronto sperimentale vanno valutati incertezza, fondo ed efficienze dei canali.

Campione del modello casuale

coppia	esiti
1	$++$
2	$+-$
3	$--$
4	$++$
5	$-+$
6	$+-$
7	$++$
8	$--$

Conteggi: 3, 2, 1, 2

Campione del modello coerente

coppia	esiti
1	$++$
2	$--$
3	$++$
4	$++$
5	$--$
6	$++$
7	$--$
8	$++$

Conteggi: 5, 0, 0, 3

Ordine dei conteggi: $(++, +-, -+, --)$. Registri sintetici per otto coppie raccolte.

Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 898 (2002).

Lo stato entangled come sintesi del percorso

Ritroviamo la sovrapposizione congiunta studiata nella Parte VII. HH e VV sono configurazioni della stessa coppia; i coefficienti ne conservano ampiezze e fase relativa, qui zero. Questo stato entangled permette di ricavare entrambe le letture appena costruite.

Due contributi della stessa coppia



Ampiezze della coppia

$$(a_{HH}, a_{HV}, a_{VH}, a_{VV}) = \frac{(1,0,0,1)}{\sqrt{2}}$$

La formula conserva le ampiezze utilizzate per prevedere entrambe le letture della coppia.

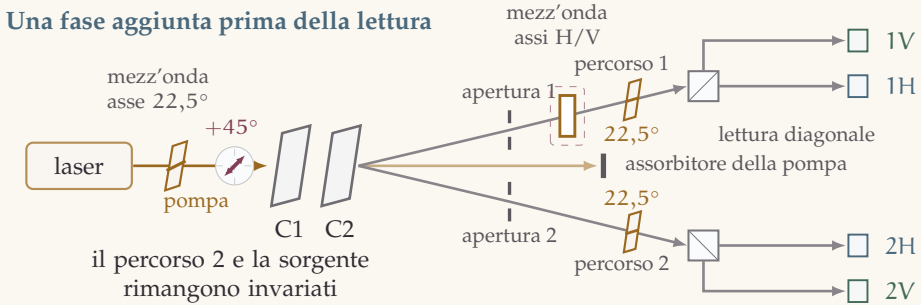
Con una fase relativa ϕ, il contributo VV porta il fattore $e^{i\phi}$.

Stato di polarizzazione condizionato a una coppia raccolta, nel modello ideale.

Stato prodotto dalla sorgente a due cristalli, nella convenzione scelta. Kwiat et al., Phys. Rev. A 60, R773 (1999).

Modificare la fase su un solo percorso

Lasciamo invariata la sorgente e inseriamo una mezz'onda con assi H/V nel percorso 1, prima dell'analizzatore diagonale. Come negli esempi sulle lamine, essa introduce mezzo ciclo di fase relativa fra H e V, conservando le direzioni H e V.



Mezz'onda di fase: asse a 0°. Mezz'onde di analisi: assi a 22,5°.

Mezz'onda locale equivalente a una fase relativa di π nella coppia. Kwiat et al., Phys. Rev. A 60, R773 (1999).

Modificare la fase su un solo percorso

Nel contributo HH, il primo fotone è H. Nel contributo VV è V e acquista il segno relativo opposto. La coppia passa così dalla somma HH più VV alla somma HH meno VV. Gli analizzatori finali rimangono entrambi diagonali.



Mezz'onda di fase: asse a 0°. Mezz'onde di analisi: assi a 22,5°.

Mezz'onda locale equivalente a una fase relativa di π nella coppia. Kwiat et al., Phys. Rev. A 60, R773 (1999).

Con la fase opposta cambiano le coppie

Ripetiamo il calcolo nella lettura diagonale. Il segno aggiunto a VV inverte il suo contributo a ogni esito. Per $++$ e $--$ le ampiezze si cancellano; per $+-$ e $-+$ si sommano. Ora i risultati della coppia sono sempre discordi nel modello ideale.

Contributi nella lettura diagonale

esito	da HH	da VV
$++$	$+\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$
$+-$	$+\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$+\frac{1}{2\sqrt{2}}$
$-+$	$+\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$+\frac{1}{2\sqrt{2}}$
$--$	$+\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Probabilità, fase π

percorso 1 \ percorso 2	$+$	$-$
$+$	0%	50%
$-$	50%	0%

fase della sorgente 0 più mezzo ciclo nel percorso 1

La somma dei contributi determina la probabilità di ciascun risultato.

Stessa analisi finale: cambia unicamente la fase relativa HH/VV. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 903 (2002).

La fase cambia le correlazioni

Le tabelle hanno gli stessi totali per righe e colonne: ogni percorso dà $+$ e $-$ con probabilità uguali. La fase cambia l'associazione fra i risultati. Per osservarla confrontiamo i registri delle stesse prove, come nello studio precedente delle correlazioni.

Fase 0: risultati concordi

percorso 1 \ percorso 2	$+$	$-$
$+$	50%	0%
$-$	0%	50%

in ogni percorso:
$\mathrm{P}(+) = 50\%$, $\mathrm{P}(-) = 50\%$

Fase π: risultati discordi

percorso 1 \ percorso 2	$+$	$-$
$+$	0%	50%
$-$	50%	0%

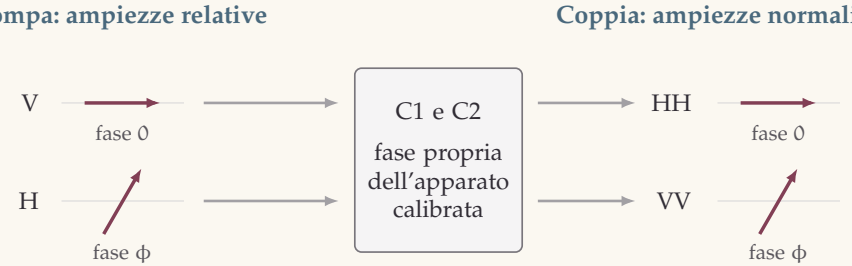
in ogni percorso:
$\mathrm{P}(+) = 50\%$, $\mathrm{P}(-) = 50\%$

Entrambe le tabelle danno 50% $+$ e 50% $-$ in ciascun percorso.

Marginali calcolate su tutte le coppie del modello. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 903 (2002).

Seguire la fase da pompa a coincidenze

Regoliamo ora la fase prima dei cristalli: variamo lo sfasamento fra le oscillazioni H e V della pompa. I moduli restano uguali. Con la fase propria dell'apparato calibrata, questa regolazione modifica la fase relativa fra HH e VV e quindi le coincidenze diagonali.



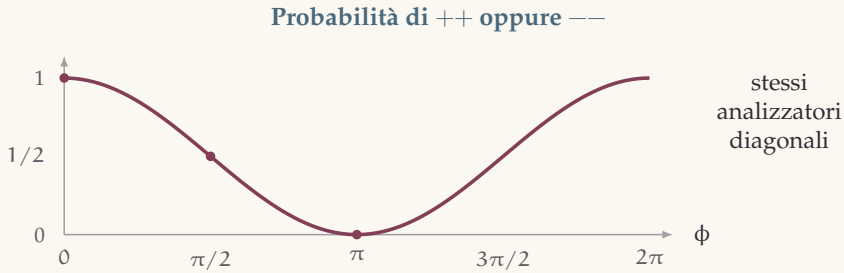
il modulo resta uguale; cambia l'orientazione di una freccia

La fase dovuta all'apparato è calibrata. Le due righe seguono le componenti della pompa.

Regolazione della fase della pompa e osservazione delle coincidenze: Kwiat et al., Phys. Rev. A 60, R773 (1999).

Seguire la fase da pompa a coincidenze

Variando la fase relativa della coppia, cambia la probabilità totale di risultati concordi. I casi 0 e π sono quelli già calcolati. A $\pi/2$ la probabilità concorde è $1/2$: una singola tabella uniforme può quindi corrispondere anche a una preparazione coerente con fase diversa.

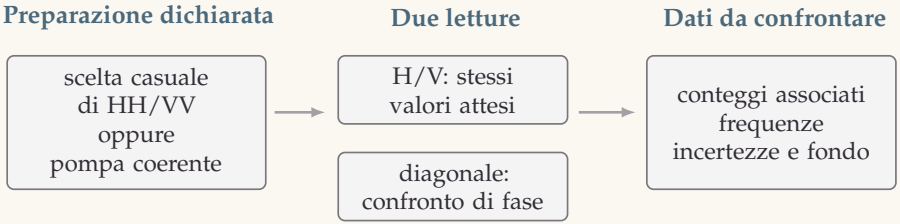


Curva teorica: moduli uguali e fase controllata. Ogni punto usa nuove coppie.

Regolazione della fase della pompa e osservazione delle coincidenze: Kwiat et al., Phys. Rev. A 60, R773 (1999).

Il significato del confronto sperimentale

Con fase calibrata a zero, la lettura diagonale distingue i due modelli dichiarati. La tabella H/V, da sola, è comune a entrambi. Nel banco reale vanno controllati fondo, fase ed efficienze. Le due prossime prove variano i pesi e una lamina locale; seguirà l'approfondimento delle condizioni del cristallo.



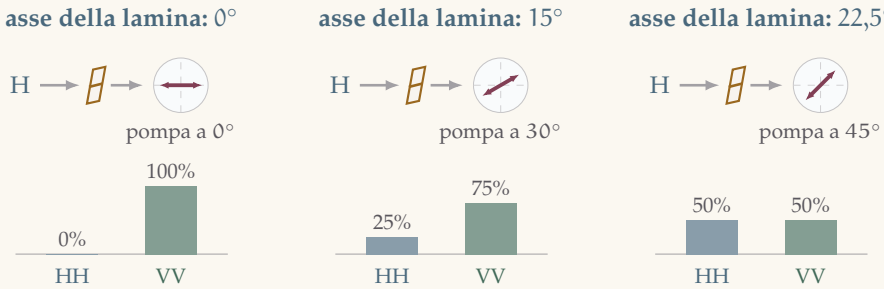
Il confronto riguarda i due modelli dichiarati. La caratterizzazione generale richiede ulteriori prove.

La validazione fisica richiede dati sperimentali indipendenti dai campioni simulati.

Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 903 (2002).

Regolare il peso con la lamina della pompa

Ripristiniamo la lettura H/V togliendo le lamine degli analizzatori. La mezz'onda della pompa, con asse a 15°, porta l'ingresso H a 30°. La componente V alimenta HH e quella H alimenta VV. Con uguali efficienze, i loro quadrati danno pesi 25% e 75%. La fase resta controllata.



Probabilità H/V della coppia: $P(HH) = \sin^2 \alpha$, $P(VV) = \cos^2 \alpha$. α è l'angolo della pompa.

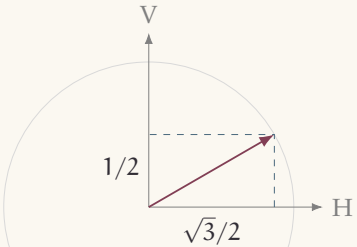
L'angolo della pompa è il doppio di quello dell'asse, per l'ingresso H scelto. Kwiat et al., Phys. Rev. A 60, R773 (1999).

Calcolare i pesi delle tre regolazioni della pompa

Con ingresso H, la mezz'onda porta la pompa all'angolo $\alpha = 2\theta$, dove θ è l'angolo del suo asse. I pesi sono $P(HH) = \sin^2 \alpha$ e $P(VV) = \cos^2 \alpha$. Per $\theta = 0$, $\alpha = 0$: i pesi sono $0^2 = 0$ e $1^2 = 1$. Per $\theta = 15°$, $\alpha = 30°$:

$$P(HH) = (1/2)^2 = 1/4.$$

Analogamente $P(VV) = (\sqrt{3}/2)^2 = 3/4$. Per $\theta = 22{,}5°$, $\alpha = 45°$, entrambi valgono $(1/\sqrt{2})^2 = 1/2$. Ogni coppia somma a uno.

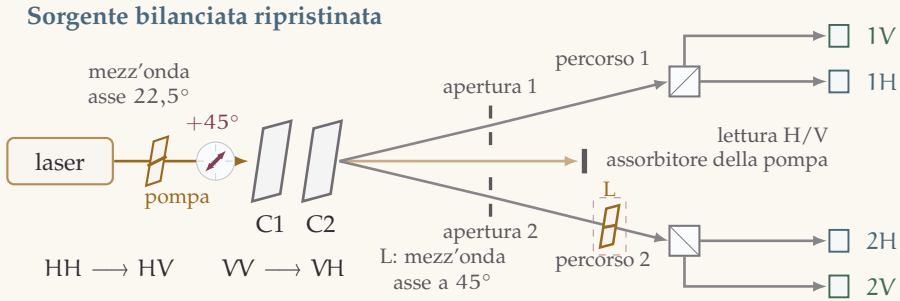


Pompa a 30°.
Le etichette sono componenti normalizzate.

Si assumono uguali efficienze dei due contributi raccolti e una fase relativa controllata.

Una lamina locale trasforma la coppia

Riportiamo la pompa a 45° e la fase della coppia a zero. Aggiungiamo una mezz'onda con asse a 45° soltanto nel percorso 2: essa scambia H e V. HH diventa HV e VV diventa VH. La lettura H/V dà ora le due coppie discordi, ciascuna con probabilità 50%.



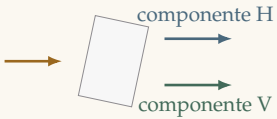
L agisce sul secondo fotone. Le due trasformazioni riguardano contributi della stessa coppia.

Mezz'onda locale progettata per i fotoni prodotti; sorgente bilanciata e analisi H/V fissa. Kwiat et al., Phys. Rev. A 60, R773 (1999).

Dalla lamina al cristallo anisotropo

Dopo le prove sulla coppia, approfondiamo le condizioni del cristallo. Ripartiamo dalle lamine: il materiale modifica diversamente le due componenti della luce. L'anisotropia descrive questa dipendenza dalla direzione. Il richiamo collega la propagazione già studiata al funzionamento della sorgente.

La lamina che conosciamo



Le due componenti attraversano lo stesso spessore, ma possono accumulare fasi differenti.

La dipendenza dal materiale



La risposta dipende dalla direzione del campo rispetto agli assi del cristallo.

Il ponte parte da un effetto già studiato: il ritardo relativo introdotto da una lamina birifrangente.

Yariv, *Quantum Electronics*, §5.2–5.4. Prove | Calibrazione

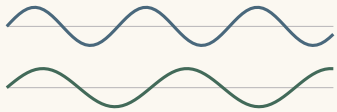
L’asse ottico organizza la propagazione

In un cristallo anisotropo esistono direzioni privilegiate determinate dalla struttura del materiale. Per una direzione di propagazione fissata, il campo può essere scomposto nei modi di polarizzazione ammessi. I due modi possono avere indici di rifrazione differenti e quindi accumulare fasi differenti lungo lo stesso spessore.

Stessa direzione di propagazione



Due fasi accumulate



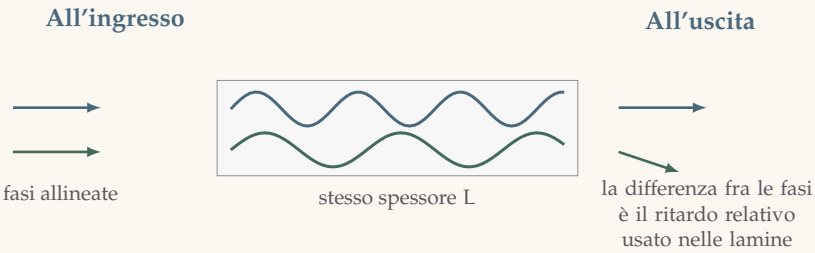
Dopo lo stesso tratto, le oscillazioni non hanno in generale la stessa fase.

Disegno qualitativo: i due modi ammessi e le loro fasi dipendono dalla direzione di propagazione nel cristallo.

Yariv, *Quantum Electronics*, 3a ed., cap. 5, propagazione nei cristalli anisotropi.

Lo stesso spessore può produrre un ritardo relativo

La fase accumulata dipende dall'indice visto dal modo e dalla distanza percorsa. Se i due modi vedono indici differenti, dopo lo stesso spessore emerge una differenza di fase. È il meccanismo che abbiamo già utilizzato per comprendere le lamine a quarto e a mezz'onda.



La fase accumulata cresce con il cammino ottico; qui interessa la differenza fra i due modi, non una fase globale comune.

Yariv, *Quantum Electronics*, 3a ed., cap. 5, propagazione nei cristalli anisotropi.

Anisotropia e non linearità sono proprietà diverse

L'anisotropia descrive la dipendenza dalla direzione e dalla polarizzazione della luce; serve a capire propagazione e fase. La non linearità descrive invece come la risposta del materiale dipende dall'ampiezza del campo applicato. Nella sorgente BBO utilizzeremo entrambe le proprietà, con funzioni differenti.

Anisotropia



Cambiamo l'orientazione: cambia la propagazione dei modi e quindi la fase accumulata.

Non linearità



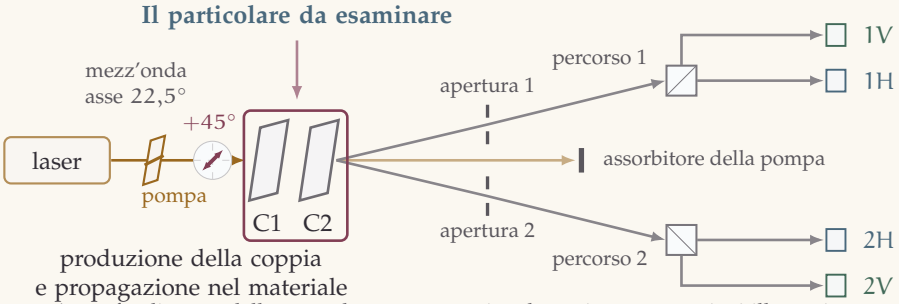
A orientazione fissata, la risposta può smettere di essere proporzionale al campo.

Sono proprietà diverse dello stesso materiale: la prima riguarda la direzione; la seconda la dipendenza della risposta dall'ampiezza del campo.

Yariv, *Quantum Electronics*, 3a ed., capp. 5 e 16–17.

Ritornare alle condizioni della sorgente

Ripristiniamo la pompa a 45° e togliamo la lamina dal percorso 2. Il banco torna al caso bilanciato. Dopo il richiamo su anisotropia e propagazione, esaminiamo le ipotesi del calcolo precedente: produzione nel materiale, selezione delle uscite e coincidenza delle descrizioni temporali HH e VV.



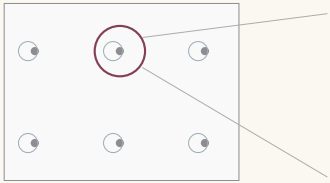
Approfondimento dello stesso banco; geometria schematica e proporzioni illustrative.

Kwiat et al., Phys. Rev. A 60, R773 (1999).

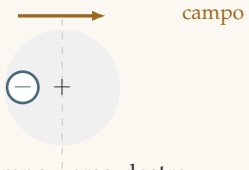
Il campo agisce sulle cariche del materiale

Il campo della pompa sposta leggermente le cariche legate. La loro separazione contribuisce alla *polarizzazione del materiale*. La *polarizzazione della luce* descrive invece l'orientazione del campo. Nel riferimento lineare, invertendo il campo si inverte anche la risposta del materiale.

Una regione del cristallo



Lo stesso elemento, ingrandito



campo verso destra
la carica legata risponde al campo

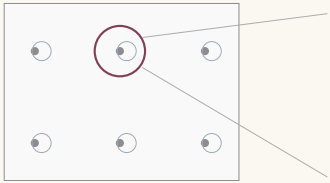
Risposta proporzionale di riferimento; spostamenti amplificati delle distribuzioni di carica legata.

Yariv, *Quantum Electronics*, 3a ed., §5.1.

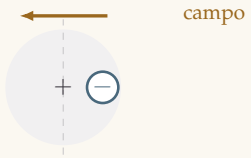
Il campo agisce sulle cariche del materiale

Il campo della pompa sposta leggermente le cariche legate. La loro separazione contribuisce alla *polarizzazione del materiale*. La *polarizzazione della luce* descrive invece l'orientazione del campo. Nel riferimento lineare, invertendo il campo si inverte anche la risposta del materiale.

Una regione del cristallo



Lo stesso elemento, ingrandito



mezzo ciclo dopo
la carica legata risponde al campo

Risposta proporzionale di riferimento; spostamenti amplificati delle distribuzioni di carica legata.

Yariv, *Quantum Electronics*, 3a ed., §5.1.

Quando la risposta non è più proporzionale

La retta descrive una risposta proporzionale: raddoppiando il campo, raddoppia la polarizzazione del materiale. Il contributo quadratico curva questa relazione e permette interazioni fra frequenze differenti. Questa è la non linearità del modello; la produzione spontanea richiede la descrizione quantistica della pagina seguente.



Un contributo ulteriore

dipendenza dal quadrato del campo applicato

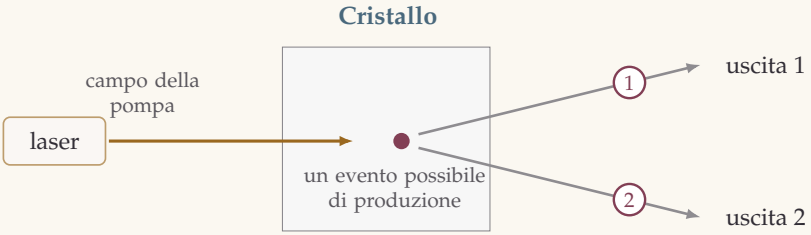
BBO: beta-borato di bario materiale della sorgente

Riferimento lineare tratteggiato; contributo non lineare amplificato. Curva illustrativa del modello.

Yariv, *Quantum Electronics*, 3a ed., capp. 16–17, ottica non lineare e processi parametrici.

Dal termine non lineare all'interazione fra campi

La risposta non lineare mette in relazione pompa e campi di uscita, permettendo uno scambio di energia. La descrizione quantistica assegna un'ampiezza alla produzione di una coppia anche con uscite inizialmente vuote. L'energia proviene dalla pompa. Questo processo è la conversione parametrica spontanea, indicata con la sigla SPDC.



La pompa fornisce l'energia. Il disegno rappresenta un evento possibile della sorgente.

Yariv, *Quantum Electronics*, 3a ed., capp. 16–17, ottica non lineare e processi parametrici.

Frequenza, lunghezza d'onda ed energia

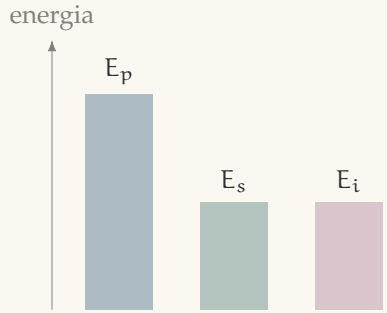
Nel vuoto un'onda percorre in un periodo $T = 1/f$ una lunghezza d'onda λ:

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f, \qquad f = \frac{c}{\lambda}.$$

L'energia di un fotone è $E = hf$, perciò

$$E = h\frac{c}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda}.$$

Qui c è la velocità della luce nel vuoto e h la costante di Planck. A parità di h e c, raddoppiare λ dimezza l'energia del fotone.



Caso degenere:
$E_s = E_i = E_p/2$

Le lunghezze d'onda di questa sequenza sono riferite al vuoto. Fonte: Halliday, §38.1.

Ricavare 810 nm dalla pompa a 405 nm

La conversione parametrica conserva l'energia:

$$E_p = E_s + E_i, \qquad hf_p = hf_s + hf_i.$$

Dividendo per $h \neq 0$ e scegliendo il caso degenere $f_s = f_i = f$:

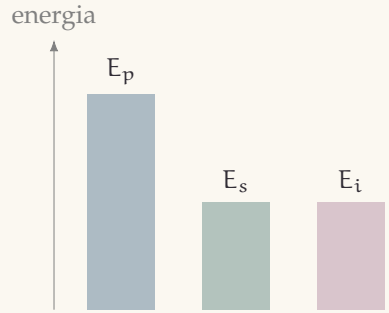
$$f_p = f + f = 2f, \qquad f = f_p/2.$$

Le due lunghezze d'onda nel vuoto valgono

$$\lambda = \frac{c}{f_p/2} = 2\frac{c}{f_p} = 2\lambda_p.$$

Con $\lambda_p = 405\,\text{nm}$:

$$\lambda_s = \lambda_i = 2 \cdot 405 = 810\,\text{nm}.$$

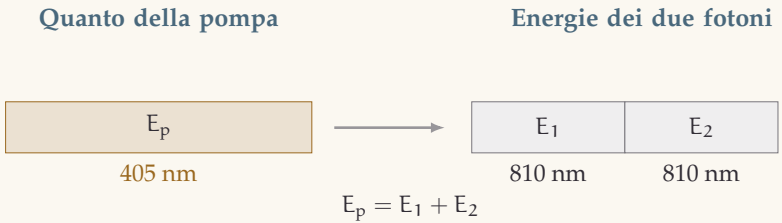


Caso degenere:
$E_s = E_i = E_p/2$

Serve anche l'accordo di fase nel cristallo. Fonti: Gerry–Knight, §9.1; Yariv, §17.7.

L’energia della pompa si ripartisce nella coppia

L’energia di un quanto della pompa si ripartisce fra due fotoni: $E_p = E_1 + E_2$. Le due parti possono essere differenti; i filtri selezionano le frequenze raccolte. Nel caso simmetrico illustrato, una pompa a 405 nm alimenta due fotoni intorno a 810 nm, ciascuno con metà dell’energia iniziale. I colori dell’infrarosso sono convenzionali.



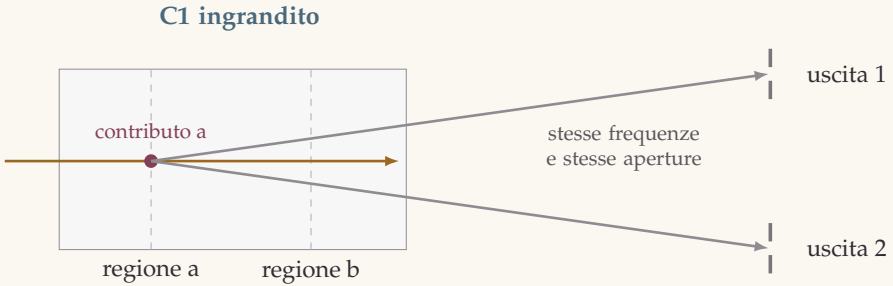
Nel caso simmetrico: metà energia, metà frequenza, doppia lunghezza d’onda.

Lunghezze d’onda nel vuoto; 810 nm è infrarosso. Le barre hanno la stessa scala di energia.

Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 898 (2002).

La stessa coppia riceve contributi da regioni diverse

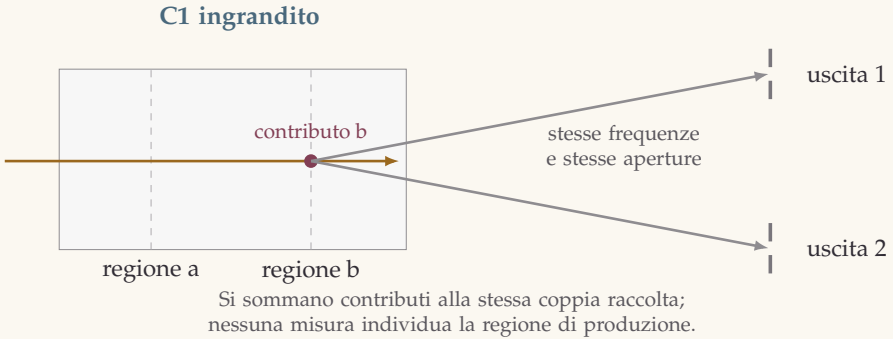
Fissiamo le due uscite e le frequenze raccolte. Una regione vicina all'ingresso di C1 contribuisce all'ampiezza di produzione della coppia selezionata. La pompa raggiunge quella regione e i campi prodotti proseguono fino alle aperture.



Karan et al., arXiv:1810.01184 (2018).

La stessa coppia riceve contributi da regioni diverse

Anche una regione più avanti in C1 contribuisce alla stessa coppia raccolta. Le due possibilità entrano nel calcolo come ampiezze. Per sommarle occorre seguire la fase della pompa e quella accumulata dai campi dopo la conversione.



Karan et al., arXiv:1810.01184 (2018).

Da dove viene la fase di un contributo

Fissiamo pompa, frequenze e uscite. Convertire nella regione a oppure b cambia i tratti percorsi prima e dopo l'evento. La fase comprende entrambe le propagazioni, con indici dipendenti da frequenza, polarizzazione e direzione. L'accordo di fase regola la somma dei contributi alla stessa coppia raccolta.

Stesso ingresso e stesse uscite, conversione in regioni diverse



La fase del contributo comprende la pompa in arrivo e la propagazione fino alle uscite.

Ogni riga indica un'alternativa di produzione; distanze schematiche lungo la propagazione.

Yariv, *Quantum Electronics*, 3a ed., capp. 16–17, ottica non lineare e processi parametrici.

Accordo di fase: i contributi si accumulano

Dividiamo idealmente il cristallo in quattro regioni, con contributi unitari alla stessa coppia raccolta. Nella regolazione illustrata le fasi sono uguali. Disponendo le frecce punta contro coda, il modulo della somma vale 4; il quadrato vale 16. Questo è un peso relativo nella scala scelta, da distinguere dalla probabilità assoluta di generazione.

Regioni del medesimo cristallo



una freccia per ogni contributo
alla stessa coppia di uscite

Somma delle ampiezze



risultante: 4 unità
peso: $4^2 = 16$

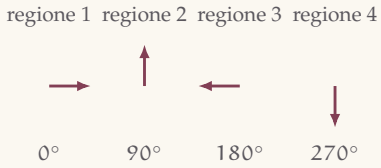
Ampiezze in unità convenzionali; il peso 16 non è una probabilità assoluta di produzione.

Yariv, *Quantum Electronics*, 3a ed., capp. 16–17, ottica non lineare e processi parametrici.

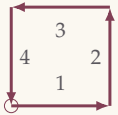
Quando l'accordo manca, i contributi si compensano

Manteniamo quattro moduli uguali e assegniamo alle fasi gli angoli 0°, 90°, 180° e 270°. Nella somma punta contro coda il percorso si chiude: risultante e peso si annullano. La stessa energia disponibile può quindi accompagnarsi a pesi diversi nelle uscite selezionate. Gli angoli delle frecce indicano fasi delle ampiezze.

Contributi con fasi successive



Somma punta contro coda



punto iniziale e finale coincidono
risultante nulla

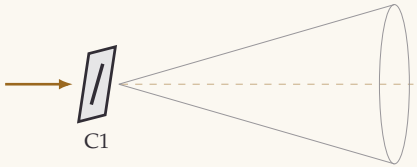
Le frecce sono ampiezze di produzione. Gli angoli indicano fasi, distinte dalle direzioni della polarizzazione.

Yariv, *Quantum Electronics*, 3a ed., capp. 16–17, ottica non lineare e processi parametrici.

Ruotare il cristallo cambia le condizioni di propagazione

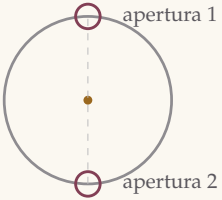
Nel BBO la propagazione dipende dalla polarizzazione e dalla direzione rispetto all'asse ottico. Ruotare il cristallo cambia le fasi accumulate e le uscite in cui i contributi si rinforzano. Nella geometria simmetrica illustrata queste direzioni formano un cono, visto frontalmente come un anello. Le aperture opposte definiscono i percorsi raccolti.

Vista laterale: stessa pompa



direzioni ammesse
per la frequenza selezionata

Vista frontale



asse della pompa al centro

Geometria simmetrica con due fotoni della stessa frequenza; angoli e spessori illustrativi.

Yariv, *Quantum Electronics*, 3a ed., cap. 5, propagazione nei cristalli anisotropi.

Due problemi di fase, con ruoli differenti

L'accordo fra regioni dello stesso cristallo determina come cresce l'ampiezza verso le uscite scelte. La fase fra le alternative HH e VV determina invece le correlazioni di polarizzazione. I due confronti riguardano contributi differenti e vengono verificati separatamente.

Dentro un cristallo



stessa coppia raccolta
regioni differenti di C1

accordo di fase della conversione
quanto contribuisce C1 a quelle uscite

Fra le due alternative



fase relativa ϕ
fra le ampiezze della coppia

risultati nelle letture diagonali

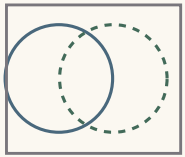
La fase della coppia e l'accordo di fase hanno ruoli distinti, pur dipendendo dallo stesso apparato.

Yariv, *Quantum Electronics*, 3a ed., capp. 16–17, ottica non lineare e processi parametrici.

Le due origini devono alimentare la stessa raccolta

Le aperture raccolgono una distribuzione del campo da C1 e una da C2. Un disallineamento può associare le due origini a posizioni differenti. Arrivare agli stessi strumenti lascia quindi ancora da verificare la sovrapposizione spaziale.

Piano dell'apertura



HH da C1: continua
VV da C2: tratteggiata

distribuzioni spaziali differenti

la posizione può rendere
distinguibile l'origine

Si ripete il controllo
per entrambi i percorsi 1 e 2.

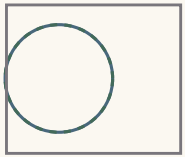
Contorni schematici: il confronto completo comprende anche le fasi e le relazioni fra i due percorsi.

Rangarajan et al., Optics Express 17, 18920 (2009).

Le due origini devono alimentare la stessa raccolta

Allineiamo le distribuzioni mantenendo fisse le aperture. La raccolta ideale richiede anche una fase relativa uniforme nelle direzioni accettate. Cristalli sottili e un'adeguata selezione spaziale aiutano a soddisfare queste condizioni.

Piano dell'apertura



HH da C1: continua
VV da C2: tratteggiata

distribuzioni sovrapposte

allineamento e fase controllati
nelle uscite raccolte

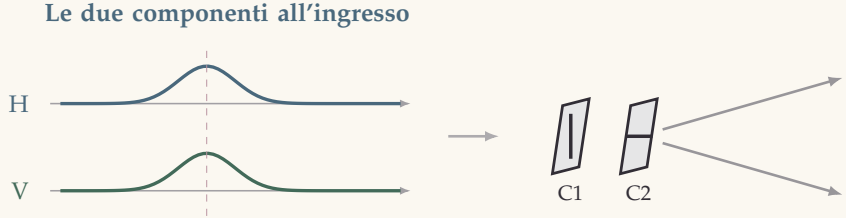
Si ripete il controllo
per entrambi i percorsi 1 e 2.

Contorni schematici: il confronto completo comprende anche le fasi e le relazioni fra i due percorsi.

Rangarajan et al., Optics Express 17, 18920 (2009).

Seguire le alternative rispetto a un impulso di pompa

Passiamo a una variante con brevi impulsi laser ripetuti. H e V entrano insieme nella sorgente. La curva che collega i massimi delle rapide oscillazioni è detta inviluppo: indica la durata dell'impulso. Ne seguiremo il transito fino all'uscita di C2.

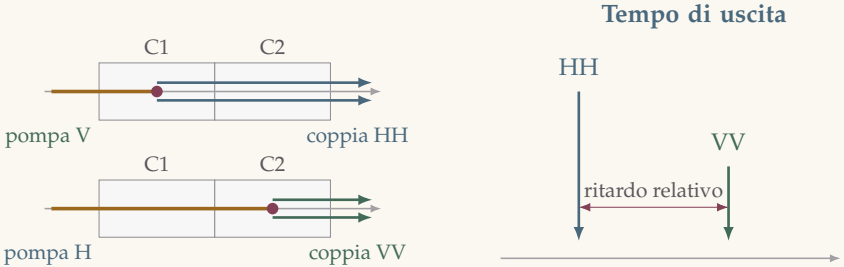


Le curve mostrano la durata degli impulsi; le rapide oscillazioni del campo sono sottintese.

Rangarajan, Goggin e Kwiat, Optics Express 17, 18920 (2009), §3.2.

I due contributi attraversano tratti differenti

Per HH, la componente V della pompa raggiunge C1 e la coppia attraversa poi C2. Per VV, la componente H attraversa C1 e alimenta C2. I tempi si ottengono sommando i contributi dei tratti percorsi dai rispettivi inviluppi. Nel caso illustrativo scelto, HH esce prima di VV; il segno della differenza dipende dalla configurazione.



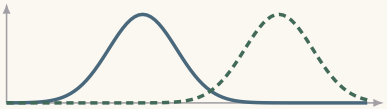
Il punto rosso è al centro del cristallo per stimare il transito; il modello completo integra le regioni.

Rangarajan, Goggin e Kwiat, Optics Express 17, 18920 (2009), §3.2.

La polarizzazione si correla con il tempo di uscita

$T = (t_1 + t_2)/2$ è il tempo medio della coppia rispetto alla pompa. HH e VV hanno profili temporali traslati; la differenza $t_2 - t_1$ e le altre proprietà sono uguali nel modello. Per la probabilità di polarizzazione si sommano le ampiezze compatibili nello stesso tempo, poi le probabilità dei tempi distinguibili. Il seguito svolge il calcolo in tre intervalli.

Stesso piano di uscita



HH: linea continua
VV: linea tratteggiata

Descrizione della coppia

HH ⟶ profilo anticipato

VV ⟶ profilo ritardato

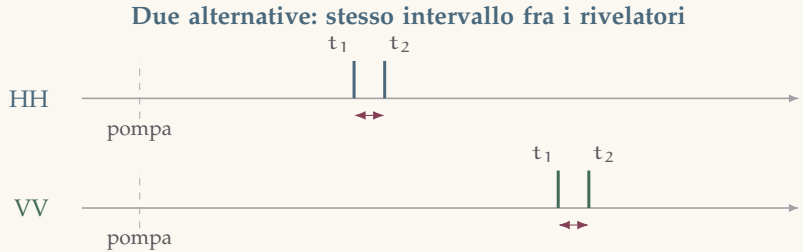
La lettura somma le probabilità dei diversi tempi di arrivo.

Profili di probabilità su scala relativa. $T = (t_1 + t_2)/2$: tempo medio di uscita, riferito alla pompa.

Rangarajan, Goggin e Kwiat, Optics Express 17, 18920 (2009), §3.2.

Tempo della coppia e finestra delle coincidenze

La finestra elettronica confronta $t_2 - t_1$. In figura questo intervallo è uguale per HH e VV, mentre il tempo medio T rispetto alla pompa cambia. La stessa coincidenza può quindi accettare profili ottici differenti. Nel seguito raccogliamo tutti i tempi: il programma conserva le proprietà della sorgente nel calcolo delle probabilità.



Stesso $t_2 - t_1$; tempo medio della coppia diverso rispetto alla pompa.
La finestra software modifica l'associazione dei segnali; i profili ottici restano quelli della sorgente.

Rangarajan, Goggin e Kwiat, Optics Express 17, 18920 (2009), §3.2.

Confrontare le ampiezze nei medesimi tempi

Usiamo tre intervalli distinti, con la stessa forma del segnale in ciascuno. HH può arrivare in T_1 o T_2; VV in T_2 o T_3, con pesi uguali. Le ampiezze al quadrato restituiscono queste probabilità. La sovrapposizione γ si calcola moltiplicando le ampiezze relative allo stesso tempo e sommando i prodotti.

Tre intervalli del tempo di uscita

	T_1	T_2	T_3
HH	1/2	1/2	0
VV	0	1/2	1/2

Probabilità dei tempi, fissata la polarizzazione. Ogni riga somma a uno.

Le ampiezze temporali

$$u = (1, 1, 0)/\sqrt{2}$$

$$v = (0, 1, 1)/\sqrt{2}$$

$$\gamma = 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{1}{2}$$

γ: somma dei prodotti delle ampiezze relative allo stesso intervallo.

Esempio a tre modi temporali distinti. Ampiezze reali positive; in T_2 contribuiscono entrambe le origini.

Rangarajan, Goggin e Kwiat, Optics Express 17, 18920 (2009), §3.2.

Dai contributi temporali alla probabilità

Fissiamo la fase a zero e calcoliamo $++$. In T_2 arrivano due ampiezze da $1/4$: la somma vale $1/2$ e il quadrato $1/4$. In T_1 e T_3 contribuisce una sola origine. Sommiamo infine le probabilità dei tre tempi distinti: otteniamo $3/8$.

Stesso esito $++$, tre tempi possibili

T_1	T_2	T_3
$1/4$ da HH	$1/4 + 1/4$	$+1/4$ da VV
	due origini, stesso tempo	
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$1/16$	$1/4$	$1/16$

$$P(++) = \frac{1}{16} + 1/4 + \frac{1}{16} = 3/8 = 37{,}5\%$$

Un contributo vale $(1/\sqrt{2})\,(1/\sqrt{2})\,(1/2) = 1/4$: sorgente, tempo e analisi diagonale.

Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 903 (2002).

Dai contributi temporali alla probabilità

Per $+-$, l'analizzatore cambia il segno del contributo VV. In T_2 le due ampiezze si cancellano. Negli altri due intervalli resta una sola ampiezza: ciascuna dà probabilità $1/16$. La somma sui tempi vale $1/8$. La stessa costruzione fornisce gli altri due esiti.

Stesso esito $+-$, tre tempi possibili

T_1	T_2	T_3
$1/4$ da HH	$1/4 - 1/4$	$-1/4$ da VV
	due origini, stesso tempo	
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$1/16$	0	$1/16$

$$P(+-) = \frac{1}{16} + 0 + \frac{1}{16} = 1/8 = 12{,}5\%$$

Un contributo vale $(1/\sqrt{2})\,(1/\sqrt{2})\,(1/2) = 1/4$: sorgente, tempo e analisi diagonale.

Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 903 (2002).

La sovrapposizione determina le quattro probabilità

I tre quadri applicano la formula a fase zero. Per $\gamma = 1/2$, $(1 + 1/2)/4 = 3/8$ e $(1 - 1/2)/4 = 1/8$: ritroviamo il calcolo svolto. I casi estremi sono $\gamma = 1$, con sole coppie concordi, e $\gamma = 0$, con quattro probabilità uguali. Ogni tabella somma a uno.

$\gamma = 1$

	+	−
+	50%	0%
−	0%	50%

profili identici

$\gamma = 1/2$

	+	−
+	37,5%	12,5%
−	12,5%	37,5%

sovrapposizione parziale

$\gamma = 0$

	+	−
+	25%	25%
−	25%	25%

limite separato

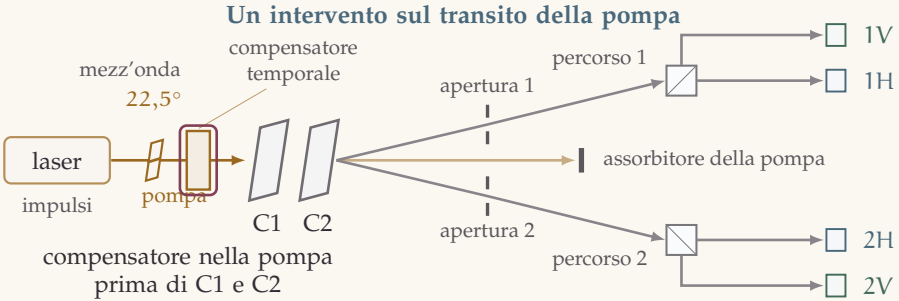
$$\mathrm{P}(++) = \mathrm{P}(--) = \frac{1+\gamma}{4}, \qquad \mathrm{P}(+-) = \mathrm{P}(-+) = \frac{1-\gamma}{4}$$

Righe: percorso 1; colonne: percorso 2. Pesi uguali, coppia raccolta. Per $\gamma = 0$ possono restare correlazioni con i tempi.

Ampiezze temporali reali positive; altre proprietà uguali. Rangarajan, Goggin e Kwiat, Optics Express 17, 18920 (2009), §3.2.

Inserire il compensatore prima della conversione

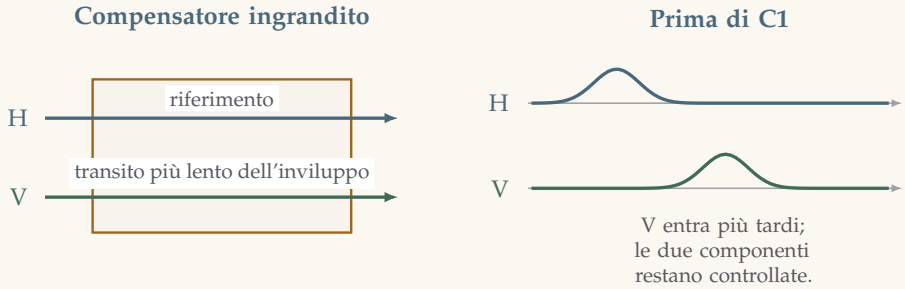
Inseriamo nella pompa, prima di C1, un elemento con tempi di transito diversi lungo H e V. Come nelle lamine già studiate, i suoi assi agiscono diversamente sulle due componenti. Ritardiamo quella che produrrebbe la coppia in anticipo.



Rangarajan, Goggin e Kwiat, Optics Express 17, 18920 (2009), §3.2.

Ritardare la componente che alimenta HH

HH esce prima di VV nell'esempio scelto. Inseriamo nella pompa, prima dei cristalli, un compensatore che ritarda V rispetto a H: V alimenta proprio la produzione HH. I due assi hanno tempi di transito differenti per gli inviluppi. Il ritardo viene regolato per ridurre la separazione alle uscite; la fase relativa richiede una calibrazione distinta.



Convenzione illustrativa: HH anticipato. Nell'apparato si determina quale contributo ritardare.

Rangarajan, Goggin e Kwiat, Optics Express 17, 18920 (2009), §3.2.

Seguire il ritardo fino alle due uscite

Poniamo il centro del profilo HH al tempo 2 e quello VV al tempo 4, in unità convenzionali. Il compensatore aggiunge 2 unità di ritardo a V della pompa, tenendo H come riferimento. Confrontiamo sempre i profili dopo C2.

Centri dei profili: stessa origine e stesso piano finale



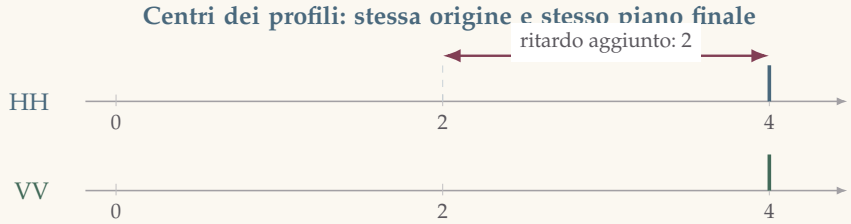
centro HH: 2 centro VV: 4

Unità temporali convenzionali. Le righe confrontano due alternative alla produzione della stessa coppia.

Rangarajan, Goggin e Kwiat, Optics Express 17, 18920 (2009), §3.2.

Seguire il ritardo fino alle due uscite

Il centro di HH passa da 2 a 4, mentre quello di VV resta a 4. Nel modello considerato i profili hanno la stessa forma: la traslazione li sovrappone. Resta da regolare la fase relativa fra le ampiezze HH e VV, come nella scansione già studiata.



HH: $2 + 2 = 4$ VV: $4 + 0 = 4$

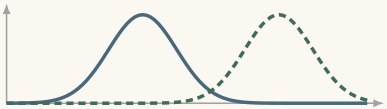
Unità temporali convenzionali. Le righe confrontano due alternative alla produzione della stessa coppia.

Rangarajan, Goggin e Kwiat, Optics Express 17, 18920 (2009), §3.2.

Calcolare la sovrapposizione dei profili a campana

Torniamo ai profili continui del banco. Nel modello gaussiano ogni curva ha centro μ e larghezza σ, che descrive la dispersione dei tempi. Il calcolo dei prodotti delle ampiezze dà la formula mostrata. Con separazione 2 e larghezza 0,5 si ottiene $\gamma \simeq 0{,}1353$; la compensazione ideale porta la separazione a zero.

Il modello continuo del banco



tempo medio di uscita T

HH: linea continua
VV: linea tratteggiata
$\mu_H = 2$, $\mu_V = 4$, $d = 2$; larghezza $\sigma = 0{,}5$.

Dai parametri alla sovrapposizione

$$\gamma = \exp\left(-\frac{d^2}{8\sigma^2}\right)$$

$$\gamma = \exp\left(-\frac{4}{2}\right) \simeq 0{,}1353$$

Dopo il ritardo correttivo: $d = 0$.
Le due descrizioni coincidono e $\gamma = 1$.

La formula deriva dalla somma continua dei prodotti delle ampiezze temporali.

Profili gaussiani: σ è la deviazione standard della probabilità temporale. Unità convenzionali; fasi interne uguali.

Rangarajan, Goggin e Kwiat, Optics Express 17, 18920 (2009), §3.2.

Sostituire separazione e larghezza nel modello gaussiano

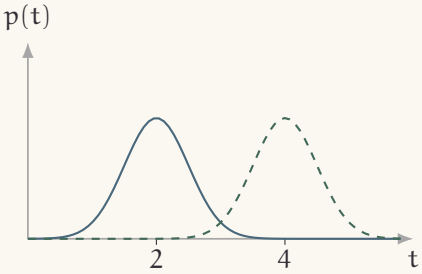
Nel modello, la sovrapposizione di due ampiezze gaussiane reali positive è $\gamma = \exp[-d^2/(8\sigma^2)]$. Per $d = 2$ e $\sigma = 0{,}5$:

$$d^2 = 2^2 = 4, \qquad \sigma^2 = (0{,}5)^2 = 0{,}25,$$

$$8\sigma^2 = 8 \cdot 0{,}25 = 2, \qquad \frac{d^2}{8\sigma^2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Dunque $\gamma = e^{-2} \simeq 0{,}135335$. Dopo la compensazione ideale $d = 0$:

$$\gamma = \exp[0/(8\sigma^2)] = e^0 = 1.$$



Centri separati di 2; larghezza 0,5. Il prodotto si calcola sulle radici delle densità.

Modulo 2: normalizzazione e integrale gaussiano; il calcolo della sovrapposizione segue nello stesso capitolo.

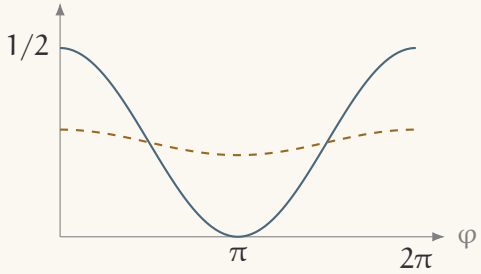
Calcolare gli estremi della scansione di fase

La probabilità è $P(++) = (1 + \gamma \cos\varphi)/4$. Poiché $\gamma \geq 0$, il massimo usa $\cos\varphi = 1$ e il minimo $\cos\varphi = -1$:

$$P_{\max} = \frac{1+\gamma}{4} \simeq \frac{1{,}135335}{4} \simeq 0{,}283834,$$

$$P_{\min} = \frac{1-\gamma}{4} \simeq \frac{0{,}864665}{4} \simeq 0{,}216166.$$

Per $\gamma = 1$, il massimo diventa $(1+1)/4 = 1/2$ e il minimo $(1-1)/4 = 0$.



Blu: $\gamma = 1$; tratteggio: e^{-2}.

Gli estremi della stessa curva vengono confrontati mantenendo fisse le altre condizioni dell'apparato.

Ricavare il contrasto dagli estremi

Dalle espressioni esatte:

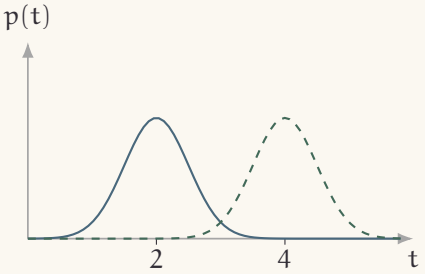
$$P_{max} - P_{min} = \frac{1+\gamma-1+\gamma}{4} = \frac{\gamma}{2},$$

$$P_{max} + P_{min} = \frac{1+\gamma+1-\gamma}{4} = \frac{1}{2}.$$

Il contrasto è dunque

$$\mathcal{V} = \frac{P_{max} - P_{min}}{P_{max} + P_{min}} = \frac{\gamma/2}{1/2} = \gamma.$$

Con i decimali arrotondati:
$(0{,}283834 - 0{,}216166)/(0{,}283834 + 0{,}216166) = 0{,}067668/0{,}5 \simeq 0{,}1353$.



La separazione temporale riduce la sovrapposizione delle ampiezze.

Nel modello bilanciato, il contrasto passa da circa 13,5% a 100% quando la sovrapposizione passa da e^{-2} a uno.

La scansione di fase verifica il recupero del contrasto

Prima della compensazione, $\gamma \simeq 0{,}1353$ produce gli estremi 0,2838 e 0,2162: il contrasto vale circa 13,5%. Dopo la compensazione ideale, la probabilità di ++ varia da zero a $1/2$ e il contrasto è completo. Ogni punto sperimentale richiede nuove coppie alla fase scelta.

La stessa scansione prima e dopo



Blu: compensazione ideale.
Ocra tratteggiato: prima, con ritardo.

Estremi e contrasto della casella ++

	prima	dopo
γ	$e^{-2} \simeq 0,1353$	1
P_{max}	0,2838	$1/2$
P_{min}	0,2162	0
$\mathcal{V}$	13,5%	100%

$$\mathcal{V} = \frac{P_{max} - P_{min}}{P_{max} + P_{min}}$$

Stessa scala $P(++) = (1 + \gamma \cos\varphi)/4$. Il ritardo residuo nullo ripristina $\gamma = 1$ nel modello.

Modello gaussiano; fondo e incertezze da caratterizzare. Rangarajan, Goggin e Kwiat, Optics Express 17, 18920 (2009), §3.2.

Un compensatore corregge una differenza specifica

Il recupero completo deriva dalle ipotesi dell'esempio: profili della stessa forma, un unico ritardo e altre proprietà uguali. Un compensatore reale può lasciare differenze di frequenza, direzione o fase interna. Le sole curve delle probabilità temporali non bastano a ricostruire tutte le ampiezze: servono anche le loro fasi.

Correzioni e verifiche del modello



Filtri e aperture selezionano i contributi raccolti; la selezione riduce anche il numero di eventi disponibili.

La fase delle rapide oscillazioni e il ritardo del loro inviluppo richiedono regolazioni distinte.

Rangarajan et al., Optics Express 17, 18920 (2009).

Separare le regolazioni durante le prove

Raccogliamo gli stessi percorsi e bilanciamo i contributi. Una scansione di fase permette di stimare il contrasto; modifichiamo poi il compensatore per ridurre il ritardo e ripetiamo la scansione. La fase regola la posizione delle frange. Dopo ogni intervento ricontrolliamo conteggi, bilanciamento e condizioni di raccolta.

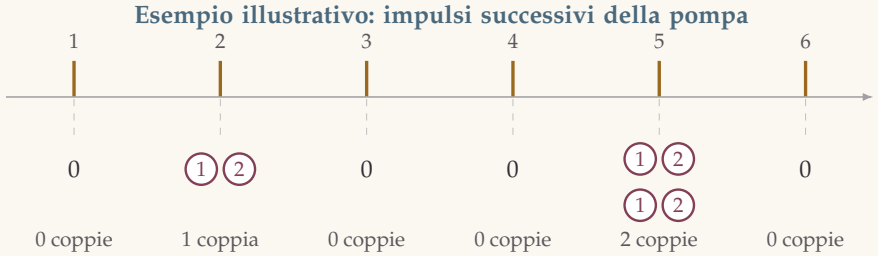
Regolazione		Aspetto controllato		Prova sul banco
cristalli e aperture	►	uscite raccolte	►	conteggi e allineamento
compensatore temporale	►	profili HH e VV	►	contrasto diagonale
fase della pompa	►	fase relativa della coppia	►	posizione delle frange

Si ricontrollano le condizioni già fissate dopo ogni modifica che possa influenzarle.

Rangarajan et al., Optics Express 17, 18920 (2009).

La coppia è un esito possibile della sorgente

Finora abbiamo descritto la polarizzazione di una coppia prodotta e raccolta. Considerando tutti gli impulsi, molti possono lasciare vuote le uscite e alcuni produrre più coppie. Questa variabilità deve entrare nel modello del registro completo.



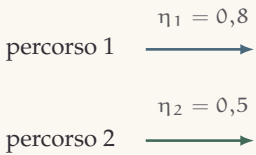
Sequenza sintetica di possibilità; la frequenza dei simboli non assegna probabilità sperimentali.

Couteau, Contemporary Physics 59, 291 (2018).

Produzione e rivelazione hanno efficienze distinte

Data una coppia prodotta, η_1 e η_2 sono le probabilità di rivelare i due fotoni. Con perdite indipendenti, la probabilità di due segnali è $\eta_1\eta_2 = 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}4$. La perdita di un segnale esclude la coppia dal registro congiunto; produzione e coincidenza restano eventi distinti.

Una coppia prodotta



Una perdita può lasciare un solo segnale o nessun segnale.

Accettare una coincidenza

Servono entrambi i segnali.

$$P(\text{due segnali} \mid \text{coppia}) = \eta_1\eta_2$$

$$0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}4$$

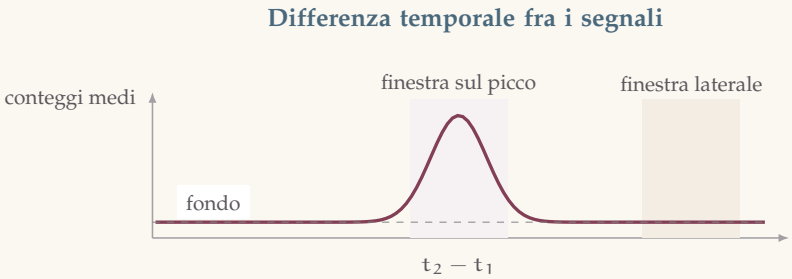
Nel 40% delle coppie prodotte arrivano entrambi i segnali. Le altre restano fuori dalle coincidenze.

Efficienze dei percorsi indipendenti e uguali per H/V entro ciascun percorso; esempio senza fondo o eventi multipli.

Efficienze diverse fra canali richiedono calibrazione. Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 898 (2002).

Stimare il fondo nelle associazioni temporali

Le coppie concentrano la differenza dei tempi vicino al picco; eventi indipendenti contribuiscono al fondo. Una finestra laterale, larga quanto quella sul picco, stima gli accidentali se il fondo è uniforme e stabile. Il picco segnala correlazioni temporali; le prove di polarizzazione caratterizzano ulteriormente la coppia.

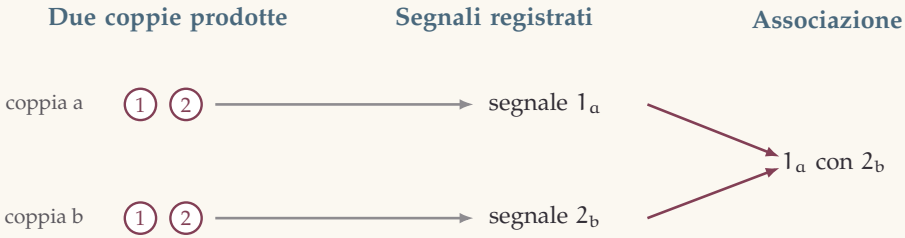


Esempio con fondo uniforme. Con pompa periodica possono comparire altri picchi: vanno scelte finestre equivalenti.

Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 898 (2002).

Due coppie possono confondere le associazioni

Con due coppie nello stesso intervallo, perdite e risposta dei rivelatori possono mescolare le associazioni. Qui il segnale nel percorso 1 proviene dalla coppia a e quello nel percorso 2 dalla coppia b. Il registro contiene una coincidenza estranea al modello a coppia singola.



Una rivelazione da ciascuna coppia può entrare nella stessa finestra di coincidenza.

Le lettere a/b indicano l'origine nel modello; i segnali sperimentali non portano questa etichetta.

Couteau, Contemporary Physics 59, 291 (2018).

Dalla sorgente al numero medio di coincidenze

Calcoliamo produzione, rivelazione ed esito di polarizzazione. Nell'esempio, 1 000 impulsi danno in media 20 coppie; dopo le perdite restano 8 coincidenze. Con probabilità $3/8$ per $++$ si attendono 3 conteggi. Concluso l'esempio fotonico, riprendiamo la calibrazione dei comandi di un qubit a due stati.

Produzione		**Rivelazione**		**Un canale diagonale**
1 000 impulsi $p_{\text{coppia}} = 0{,}02$		$\eta_1 = 0{,}8$ $\eta_2 = 0{,}5$		$\gamma = 1/2,\ \phi = 0$ $P(++) = 3/8$
$1000 \cdot 0{,}02 = 20$	→	$20 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 8$	→	$8 \cdot 3/8 = 3$
coppie in media		coincidenze in media		$++$ in media

Le medie dei quattro canali sono $(3, 1, 1, 3)$;
un singolo registro può contenere conteggi differenti.
Esempio numerico, senza fondo e coppie multiple. Probabilità della sorgente ed efficienze sono parametri assegnati.

Dehlinger e Mitchell, Am. J. Phys. 70, 898 (2002). Sorgente | Calibrazione

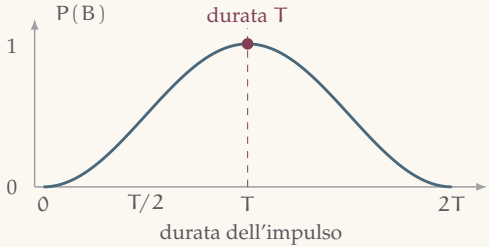
Calibrare la durata dell'impulso

Riprendiamo il qubit: per ogni durata ripetiamo preparazione A, impulso e misura. Il primo massimo di $P(B)$ individua il trasferimento completo nel modello ideale. Il confronto con le misure permette di calibrare il comando.

Una serie di prove

Preparare A.
Scegliere una durata.
Ripetere e contare B.
Cambiare la durata.

Individuare il primo trasferimento



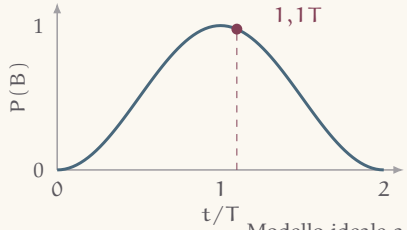
Curva del modello ideale a due livelli. In laboratorio si stimano le frequenze e la loro incertezza.

Curva teorica. Ballance et al., Phys. Rev. Lett. 117, 060504 (2016). Sorgente fotonica

Un errore nel comando cambia la previsione

Usiamo il modello ideale della calibrazione: T è la prima durata che trasferisce A in B. A frequenza e intensità fisse, $P(B)$ varia sinusoidalmente con la durata. Inserendo 1,1T nella relazione otteniamo circa 97,6% B e 2,4% A. Il grafico e il calcolo descrivono lo stesso errore del comando.

La durata rispetto al primo trasferimento



Modello ideale a due livelli, risonanza esatta e intensità costante. T è il primo trasferimento A verso B.

Un calcolo riproducibile

$$P(B) = \sin^2\left(\frac{\pi t}{2T}\right)$$

$$t = 1{,}1T \quad \Rightarrow \quad P(B) \simeq 0{,}9755$$

$$P(A) = 1 - P(B) \simeq 0{,}0245$$

Circa 97,6% B e 2,4% A.
Un massimo non implica che durate maggiori siano migliori.

Probabilità calcolate dal modello ideale e arrotondate. Ballance et al., Phys. Rev. Lett. 117, 060504 (2016).

Svolgere il calcolo per una durata maggiore del 10%

Nel modello ideale $P(B) = \sin^2(\pi t/(2T))$, dove T è il primo tempo di trasferimento completo. Per $t = 1{,}1T$:

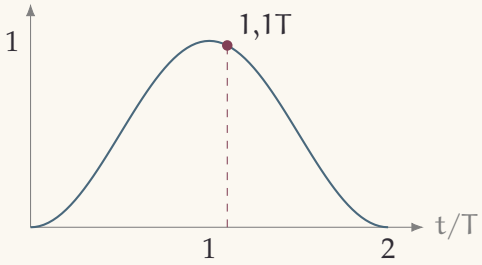
$$\frac{\pi t}{2T} = \frac{\pi\, 1{,}1T}{2T} = 0{,}55\pi.$$

Quindi

$$\begin{aligned} P(B) &= \sin^2(0{,}55\pi) \\ &\simeq (0{,}987688)^2 \simeq 0{,}975528, \end{aligned}$$

$$P(A) = 1 - P(B) \simeq 1 - 0{,}975528 = 0{,}024472.$$

Le percentuali sono circa 97,6% e 2,4%, dopo l'arrotondamento.

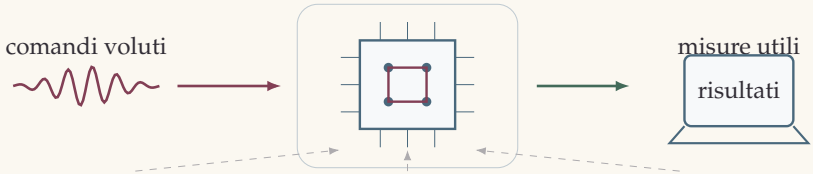


Frequenza e intensità restano fisse; cambiare la durata modifica l'angolo della medesima evoluzione.

Limitare l'azione dell'ambiente

I qubit devono ricevere i comandi utili e restare protetti dai disturbi. Campi fluttuanti, eccitazioni termiche e accoppiamenti indesiderati possono cambiare le probabilità o ridurre la coerenza. Schermature, filtri e condizioni termiche controllate riducono queste perturbazioni; le prove ripetute ne misurano gli effetti residui.

Preservare il controllo del registro

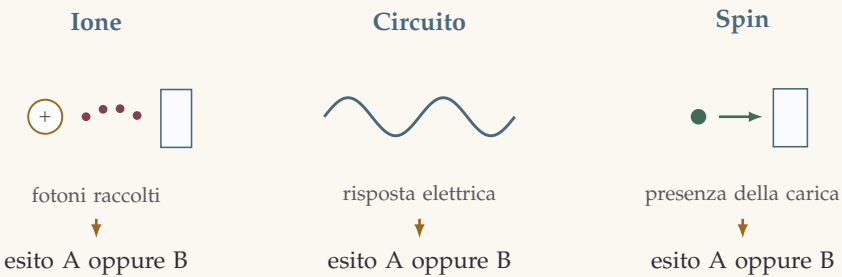


Isolamento, filtri e precisione dei comandi limitano disturbi diversi. La Parte VIII ne descrive gli effetti sullo stato.

Kjaergaard et al., Annu. Rev. Condens. Matter Phys. (2020). Bruzewicz et al., Appl. Phys. Rev. (2019).

Tre realizzazioni della lettura

Le piattaforme producono segnali fisici differenti, che l'elettronica converte in risultati digitali. Lo ione può essere letto attraverso fotoni, il circuito attraverso una risposta elettrica, lo spin attraverso una variazione di carica. Le distribuzioni dei segnali e la calibrazione determinano l'affidabilità dell'assegnazione A/B.

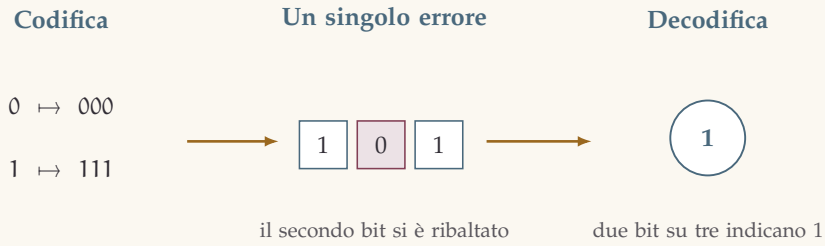


Confronto di funzioni già spiegate. Le diverse tecniche di lettura hanno ipotesi, tempi ed errori propri.

Bruzewicz et al. (2019); Kjaergaard et al. (2020); Burkard et al. (2023).

Prima analogia: ripetere l'informazione

Nel codice classico di ripetizione un bit è rappresentato da tre cifre uguali. Se una sola cifra cambia, la maggioranza permette di recuperare il valore. Nel seguito useremo questa struttura per introdurre controlli quantistici capaci di preservare anche le ampiezze e la fase relativa dello stato codificato.

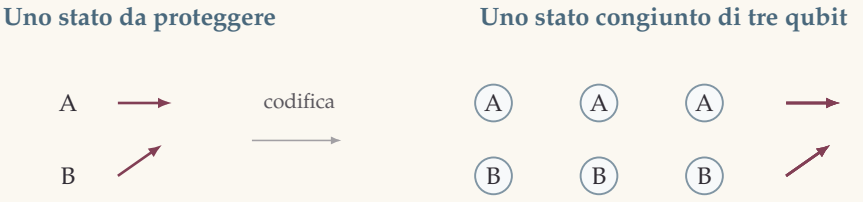


Codice classico 0→000 e 1→111. La garanzia dell'esempio riguarda un solo errore; due errori possono alterare la maggioranza.

IBM Quantum, codice di ripetizione. Un solo errore di scambio, controlli ideali.

Distribuire l'informazione in uno stato congiunto

Partiamo dal qubit da proteggere e da due qubit aggiuntivi preparati in A. La codifica porta A in AAA e B in BBB, conservando le ampiezze e la loro fase relativa. Le due righe della figura sono contributi dello stesso stato congiunto. Cercheremo poi relazioni che permettano di riconoscere un errore senza distinguere i due contributi.

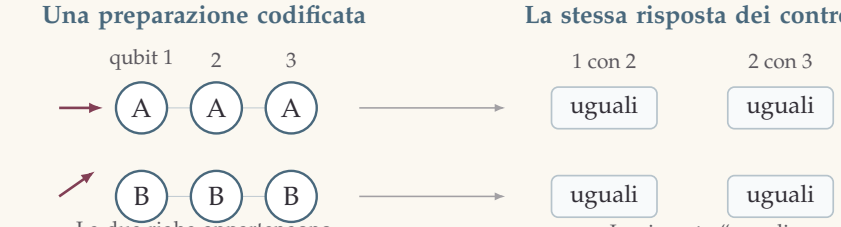


Codice didattico a tre qubit: protegge da un singolo scambio A/B. Gli errori di fase richiedono una codifica più ricca.

Codice di ripetizione a tre qubit. IBM Quantum, codice di ripetizione; Steane (1996).

Misurare le relazioni della codifica

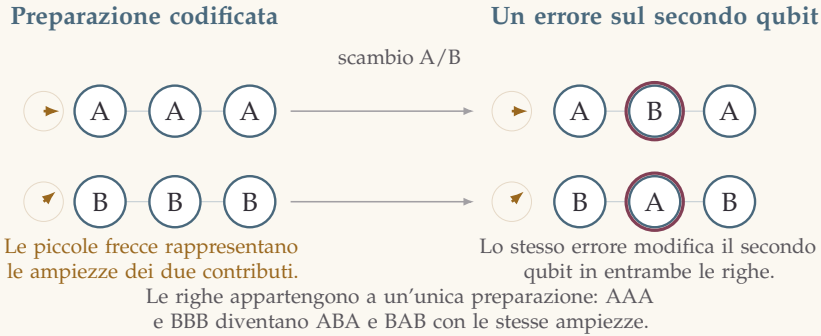
Confrontiamo i qubit 1 e 2, poi i qubit 2 e 3. AAA e BBB danno entrambe le risposte “uguali, uguali”. Una misura ideale di queste relazioni lascia indistinti i due contributi e conserva le loro ampiezze. Un singolo scambio A/B modifica almeno una risposta: seguiremo questa differenza per localizzare l’errore.



IBM Quantum, codice di ripetizione; Steane (1996).

Un errore agisce su entrambi i contributi

La codifica associa le ampiezze del qubit ai contributi AAA e BBB. Se il secondo qubit subisce uno scambio A/B, questi diventano ABA e BAB. Le piccole frecce rimangono uguali: il singolo errore di scambio conserva le ampiezze che vogliamo proteggere.

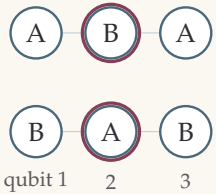


Codice a tre qubit; un solo errore A/B. IBM Quantum, codice di ripetizione; Steane (1996).

La sindrome: cercare relazioni violate

Confrontiamo il primo qubit con il secondo, poi il secondo con il terzo. Per ABA e BAB entrambi i controlli danno “diversi”. Questo risultato localizza lo scambio sul qubit centrale e lascia indistinti i due contributi della preparazione codificata.

Contributi dopo lo stesso errore



Risultati dei controlli

1 con 2	2 con 3

Le due righe danno gli stessi risultati.
I controlli individuano il tipo di errore.

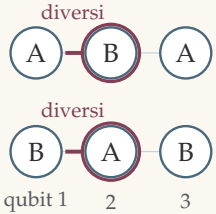
I controlli indicano esiti uguali o diversi in ciascuna coppia. La coppia dei risultati è la sindrome.

Un errore A/B e controlli ideali: le ampiezze sono conservate. IBM Quantum, codice di ripetizione; Steane (1996).

La sindrome: cercare relazioni violate

Confrontiamo il primo qubit con il secondo, poi il secondo con il terzo. Per ABA e BAB entrambi i controlli danno “diversi”. Questo risultato localizza lo scambio sul qubit centrale e lascia indistinti i due contributi della preparazione codificata.

Contributi dopo lo stesso errore



Risultati dei controlli

1 con 2	2 con 3
diversi	

Le due righe danno gli stessi risultati.
I controlli individuano il tipo di errore.

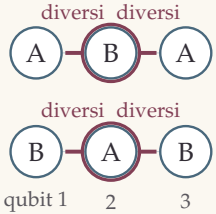
I controlli indicano esiti uguali o diversi in ciascuna coppia. La coppia dei risultati è la sindrome.

Un errore A/B e controlli ideali: le ampiezze sono conservate. IBM Quantum, codice di ripetizione; Steane (1996).

La sindrome: cercare relazioni violate

Confrontiamo il primo qubit con il secondo, poi il secondo con il terzo. Per ABA e BAB entrambi i controlli danno “diversi”. Questo risultato localizza lo scambio sul qubit centrale e lascia indistinti i due contributi della preparazione codificata.

Contributi dopo lo stesso errore



Risultati dei controlli

1 con 2	2 con 3
diversi	diversi

Le due righe danno gli stessi risultati.
I controlli individuano il tipo di errore.

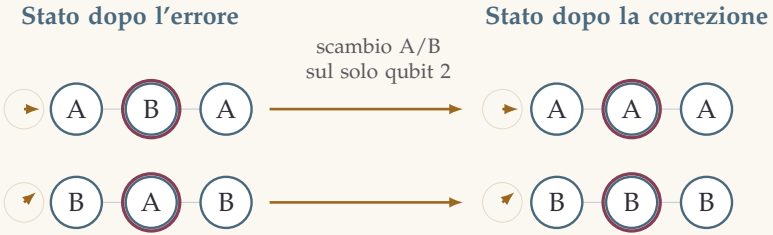
errore sul qubit 2

I controlli indicano esiti uguali o diversi in ciascuna coppia. La coppia dei risultati è la sindrome.

Un errore A/B e controlli ideali: le ampiezze sono conservate. IBM Quantum, codice di ripetizione; Steane (1996).

Correggere l'errore conservando le ampiezze

La sindrome "diversi, diversi" indica il secondo qubit. Uno scambio A/B su quel qubit riporta i contributi in AAA e BBB. L'operazione recupera l'intera sovrapposizione, conservando le ampiezze e la loro fase relativa.



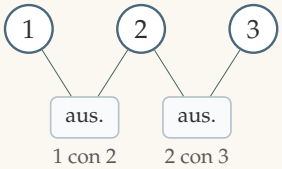
La stessa operazione riporta ABA in AAA e BAB in BBB. I coefficienti della sovrapposizione restano invariati. Il computer sceglie la correzione dalla sindrome. L'informazione logica è conservata nello stato congiunto.

Un solo errore A/B; cerchio rosso: qubit corretto. IBM Quantum, codice di ripetizione; Steane (1996).

Dai controlli collettivi alla correzione

Ogni qubit ausiliario viene collegato a una coppia per registrarne la parità: esiti uguali oppure diversi. La lettura dei due ausiliari fornisce la sindrome al computer. La tabella raccoglie i quattro casi possibili e specifica quale correzione applicare.

Ausiliari per leggere le relazioni



Si leggono i qubit ausiliari.
Le relazioni determinano la correzione.

La tabella delle correzioni

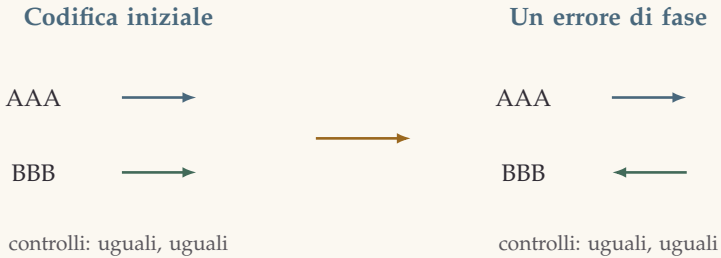
1 con 2	2 con 3	correzione
uguali	uguali	nessuna
diversi	uguali	qubit 1
diversi	diversi	qubit 2
uguali	diversi	qubit 3

Aus. = qubit ausiliario. La tabella assume al massimo un errore A/B. Il codice illustrato non protegge dagli errori di fase.

Controlli ideali di parità su coppie adiacenti. IBM Quantum, codice di ripetizione; Steane (1996).

Un errore che questi controlli lasciano invisibile

Uno scambio di segno fra i contributi AAA e BBB modifica la fase relativa dello stato codificato. I due controlli di uguaglianza danno però gli stessi risultati di prima. Questo esempio chiarisce il limite del codice illustrato: la protezione dagli errori di fase richiede controlli e codifiche ulteriori.

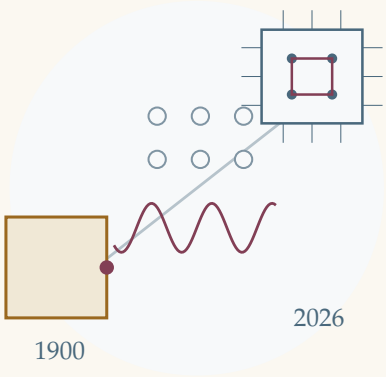


Un errore Z su un solo qubit cambia il segno relativo di BBB. Le parità delle coppie restano uguali; le ampiezze indicate sono illustrative.

IBM Quantum, codice di ripetizione. Errore di fase nella codifica a tre qubit; controlli di parità ideali.

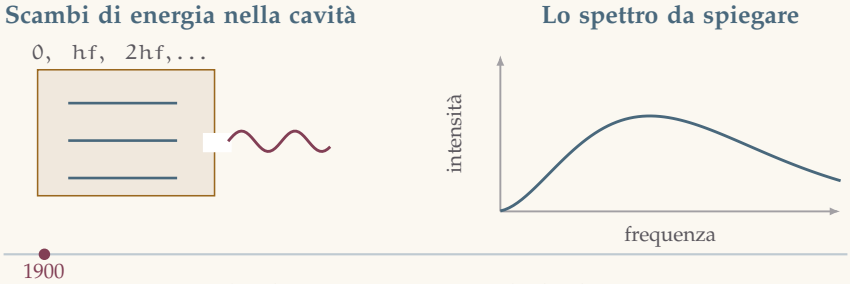
PARTE XI

Dalla meccanica quantistica al calcolo quantistico



1900: Planck e la radiazione termica

La radiazione di una cavità calda presenta uno spettro che dipende dalla temperatura. Planck introduce scambi di energia in quantità discrete per descrivere questa distribuzione. Il problema collega così una grandezza osservata, lo spettro, a una nuova ipotesi sugli scambi fra materia e radiazione.



Scambi schematici e curva teorica di Planck in unità arbitrarie. Il diagramma non riproduce misure storiche.

Planck, *Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum*, 1901; ipotesi presentata nel 1900.

1905: Einstein e gli scambi di energia della luce

Einstein propone che la luce scambi energia in pacchetti legati alla frequenza. Nell'effetto fotoelettrico, un pacchetto deve superare l'energia necessaria a liberare un elettrone dal materiale. Aumentare l'energia di ogni pacchetto e aumentarne il numero sono interventi fisici differenti.

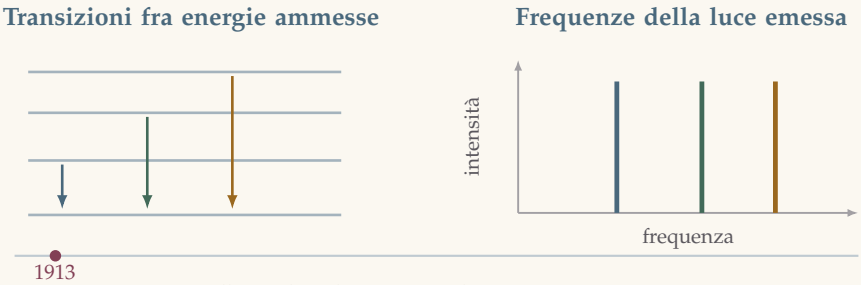


Diagramma energetico del regime fotoelettrico a singolo fotone. La linea tratteggiata rappresenta il lavoro di estrazione.

Einstein, *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*, 1905.

1913: Bohr e gli spettri atomici

Gli spettri atomici contengono righe a frequenze definite. Bohr collega queste righe a transizioni fra stati con energie ammesse. Ogni differenza di energia determina la frequenza della luce scambiata. Il modello dell'idrogeno rende centrale la descrizione discreta dei livelli atomici.

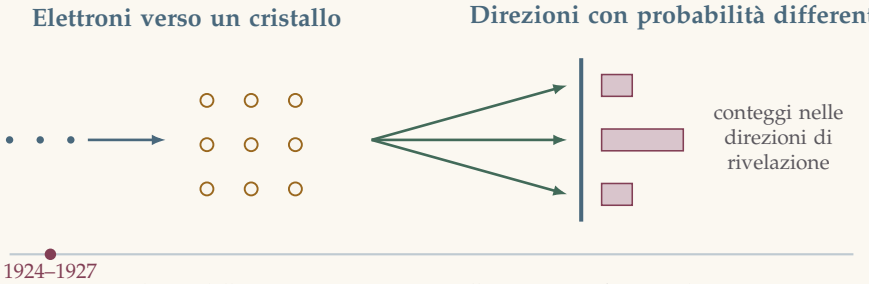


Livelli e righe schematici. I colori associano transizioni e frequenze; non riproducono i colori fisici dello spettro.

Bohr, *On the constitution of atoms and molecules*, 1913.

1924: le onde di materia

De Broglie associa una lunghezza d'onda anche alla materia. La diffrazione degli elettroni permette di verificare questa descrizione: il cristallo produce una distribuzione con direzioni favorite. Ritroviamo il problema già affrontato nel corso, collegare propagazione ondulatoria e rivelazioni localizzate.



Schema dell'esperimento e conteggi illustrativi. Le frecce indicano direzioni di rivelazione, non traiettorie misurate degli elettroni.

De Broglie, conferenza Nobel, 1929; Davisson e Germer, diffrazione elettronica, 1927.

1925–1926: una nuova meccanica

Heisenberg e Schrödinger sviluppano formulazioni della nuova meccanica. Born collega le ampiezze alle probabilità degli esiti. La struttura che abbiamo usato nel simulatore acquista così una base teorica: uno stato, una legge di evoluzione e una regola per confrontare le previsioni con le misure.

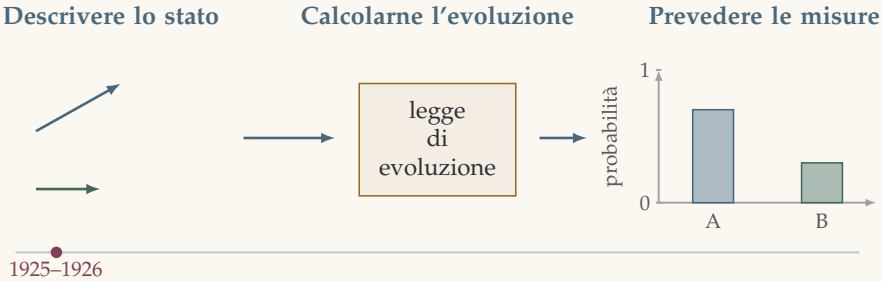
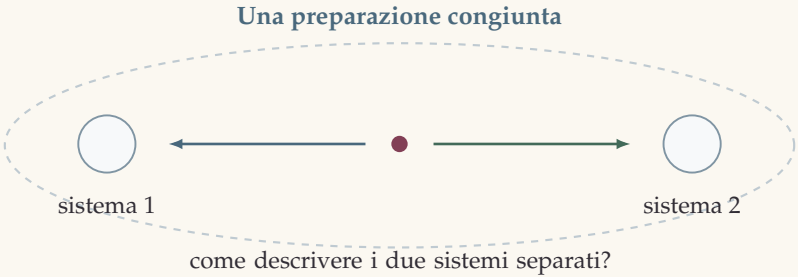


Diagramma concettuale del percorso. Le frecce piccole rappresentano ampiezze; le barre rappresentano probabilità illustrative.

Heisenberg, 1925; Schrödinger, 1926; Born, conferenza Nobel, 1954.

1935: la descrizione dei sistemi correlati

Einstein, Podolsky e Rosen mettono in discussione la completezza della descrizione quantistica. Schrödinger identifica nelle correlazioni fra sistemi una caratteristica essenziale della teoria e introduce il termine entanglement. Il problema riguarda che cosa possiamo attribuire ai sistemi separati.



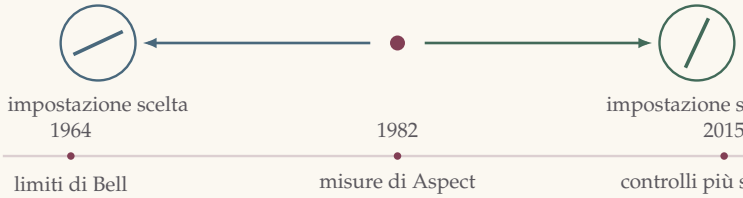
Schema moderno con due sistemi; l'argomento originale EPR usa posizione e quantità di moto.

Einstein, Podolsky e Rosen, 1935; Schrödinger, *Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik*, 1935.

Da Bell alle verifiche sperimentali

Bell ricava nel 1964 limiti alle correlazioni di modelli locali, assumendo scelte di misura indipendenti dalle variabili della sorgente. I test confrontano più orientazioni degli analizzatori. Le violazioni escludono quei modelli nelle condizioni verificate; la dimostrazione delle disuguaglianze resta un approfondimento.

Confrontare più scelte di misura

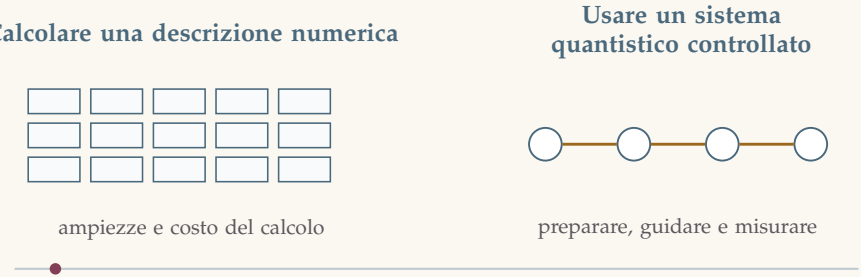


Le correlazioni violano limiti delle descrizioni locali considerate, senza consentire segnali istantanei.

Bell, 1964; Aspect, Dalibard e Roger, 1982; Hensen et al., 2015.

1980–1982: il calcolo diventa un problema fisico

Benioff descrive un modello quantistico del calcolo. Feynman richiama il costo della simulazione di sistemi quantistici generali e propone di utilizzare sistemi quantistici controllati. La domanda riguarda sia la rappresentazione numerica sia le operazioni che una macchina fisica può realizzare.

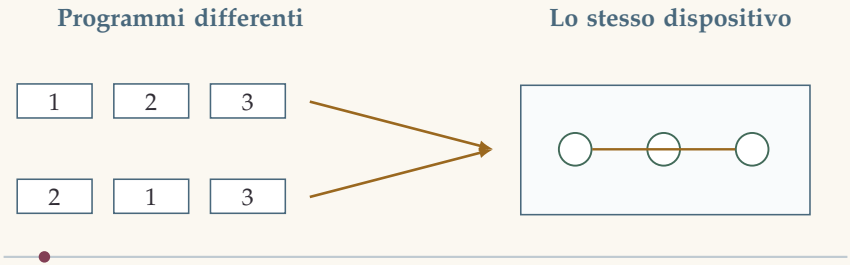


Due impostazioni della simulazione. Il confronto delle risorse deve specificare sistema, osservazioni richieste e accuratezza.

Benioff, 1980; Feynman, *Simulating physics with computers*, 1982.

1985: un computer quantistico universale

Deutsch formula un modello di computer quantistico universale. Un insieme adeguato di operazioni permette di realizzare procedure diverse cambiando il programma. Il diagramma richiama la distinzione già studiata fra la sequenza astratta e il dispositivo che esegue le trasformazioni sul registro.



Le caselle numerate rappresentano istruzioni generiche. La programmabilità illustrata è un aspetto del modello; l'universalità richiede operazioni sufficienti.

Deutsch, *Quantum theory, the Church–Turing principle and the universal quantum computer*, 1985.

1994–1996: algoritmi per problemi precisi

Shor collega la fattorizzazione di grandi interi a una procedura quantistica efficiente nel modello ideale. Grover riduce il numero di interrogazioni a un criterio che riconosce le soluzioni. Per quest'ultimo svolgiamo ora un caso a quattro alternative: il confronto riguarda le interrogazioni, mentre realizzare il criterio ha un costo proprio.

Shor, 1994

$$15 = 3 \times 5$$

ricavare i fattori di un intero

Il problema è semplice per 15.
L'interesse riguarda interi molto grandi.

Grover, 1996



trovare un elemento riconoscibile

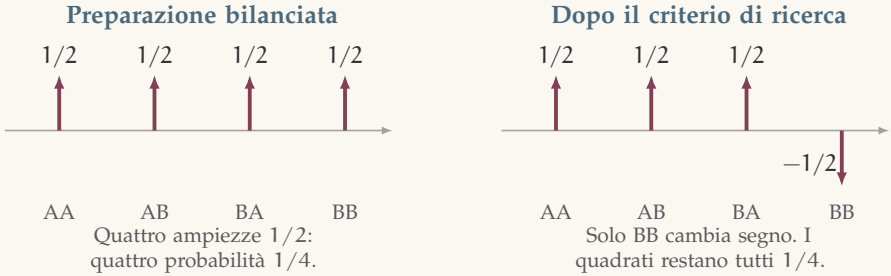
Meno interrogazioni al criterio di ricerca
nel modello senza struttura.

Il vantaggio dipende dal problema e dalle risorse confrontate. Le figure illustrano i compiti.

Shor, risultato del 1994, versione estesa 1995/1996; Grover, 1996.

Una ricerca minima: segnare una fra quattro alternative

Prepariamo due qubit con quattro ampiezze uguali. Il criterio, chiamato oracolo, applica un segno meno alla configurazione che soddisfa la condizione del problema: qui BB. Questa operazione conserva le probabilità immediate. La successiva trasformazione userà la differenza di fase per concentrare la probabilità sulla soluzione.



Le frecce sono ampiezze reali: verso opposto significa fase relativa di mezzo ciclo. In questo esempio la soluzione è BB.

Grover, 1996. Esempio ideale a quattro alternative.

Dalla differenza di fase alla soluzione

La trasformazione successiva sostituisce ogni ampiezza a_j con $2\bar{a} - a_j$, dove $\bar{a}$ è la media delle quattro ampiezze. È il diffusore di Grover. Nel nostro caso la media vale $1/4$: tre ampiezze si annullano e quella di BB diventa uno. La misura finale identifica quindi la soluzione.

Riflessione rispetto alla media

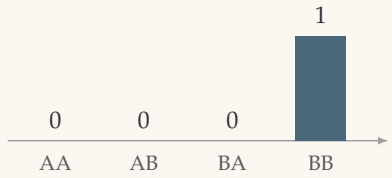
$$\bar{a} = \frac{1/2 + 1/2 + 1/2 - 1/2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$a_j' = 2\bar{a} - a_j$$

AA, AB, BA: $1/2 - 1/2 = 0$
BB: $1/2 - (-1/2) = 1$

Media delle ampiezze nel simulatore.
Operazione fissa, senza misurarle.

Probabilità della misura finale



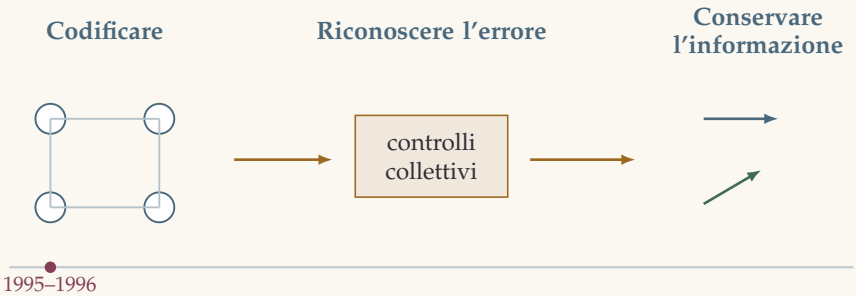
Una chiamata al criterio e una riflessione.
Esito BB con certezza nel modello ideale.

Grover ideale: due qubit, una soluzione fra quattro. Calcolo teorico con operazioni esatte.

Grover, 1996. Esempio ideale a quattro alternative.

1995–1996: proteggere l'informazione quantistica

Shor e Steane mostrano come codificare l'informazione in stati congiunti e ricavare indizi sugli errori preservando lo stato protetto. La possibilità di correggere le imperfezioni rende concepibile un calcolo affidabile, a condizione che operazioni e controlli raggiungano accuratezze sufficienti.

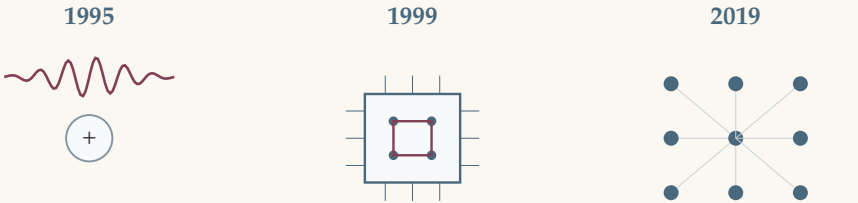


Schema della funzione della correzione, senza specificare un codice. La protezione completa deve trattare anche gli errori di fase.

Steane, Proc. R. Soc. A (1996).

Dai primi controlli ai processori programmabili

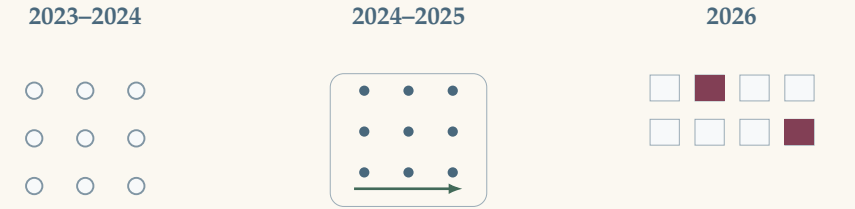
Nel 1995 una porta collega stato interno e moto di un singolo ione. Nel 1999 si controllano coerentemente stati di un circuito superconduttore. Nel 2019 un processore programmabile esegue un campionamento specifico. Sono tappe con compiti diversi; il risultato del 2019 riguarda il confronto dichiarato in quell'esperimento.



Monroe et al., 1995; Nakamura et al., 1999; Arute et al., 2019.

2023–2026: dal qubit codificato al calcolo

I lavori citati esaminano compiti distinti: operazioni su qubit codificati, conservazione dell'informazione e un piccolo algoritmo. Nel 2026 la ricerca di Grover usa tre qubit logici codificati in otto qubit fisici, con ulteriori risorse ausiliarie. I risultati vanno letti insieme agli errori e alle condizioni di accettazione delle esecuzioni.



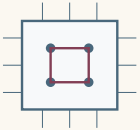
Nell'esperimento di Grover i controlli finali selezionano le esecuzioni accettate.

Bluvstein et al., 2023/2024; Google Quantum AI, 2024/2025; Butt et al., 2026.

Dai risultati citati alle domande aperte

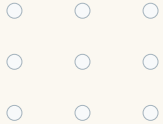
I lavori citati mostrano memorie e piccoli calcoli su qubit codificati. Per estenderli occorre controllare errori, durata e risorse. Un confronto con metodi classici deve fissare compito e precisione e contabilizzare le esecuzioni scartate. Il percorso storico presenta una selezione di risultati pubblicati.

Risultati dimostrati



memorie e
piccoli algoritmi
su qubit codificati

Passi da compiere



più qubit logici,
sequenze lunghe e precise

Confronto delle risorse



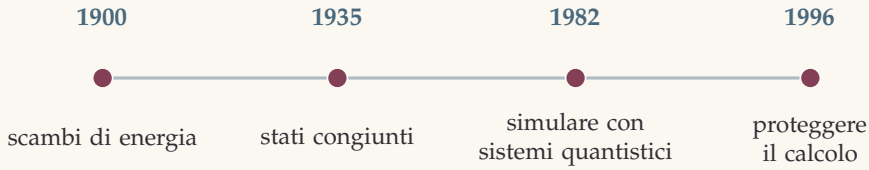
stesso problema
e precisione;
risorse dichiarate

Selezione di lavori verificati al 25 settembre 2026. Il grafico è schematico e non riporta prestazioni misurate.

Butt et al., *Demonstration of measurement-free universal logical quantum computation*, 26 gennaio 2026.

Esperimenti, modelli e macchine: il percorso

Il percorso storico riprende gli stessi passaggi del corso: descrivere ciò che viene osservato, costruire una previsione e verificare i limiti del modello. La simulazione quantistica e la correzione degli errori trasformano queste conoscenze in problemi di progettazione di apparati e algoritmi.



problemi fisici e strumenti di calcolo si sviluppano attraverso verifiche e nuove rappresentazioni

Cronologia tematica selettiva; gli intervalli fra le tappe non sono in scala. Le date rinviano ai contributi discussi nelle slide precedenti.

Richiami alle fonti delle tappe: Planck (1900), EPR (1935), Feynman (1982), Shor e Steane (1995–1996).

Dalle preparazioni alle operazioni matematiche

Le simulazioni hanno richiesto dati progressivamente più ricchi. La stessa coppia di ampiezze consente di calcolare letture diverse, purché il programma conservi le fasi durante le trasformazioni. Il secondo modulo svilupperà queste operazioni a partire dalle coordinate.

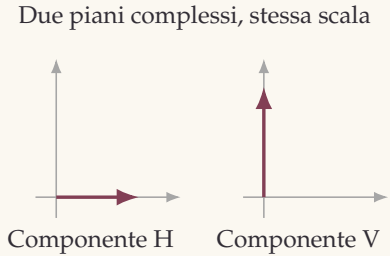
Riprenderemo la preparazione

$$(a_H, a_V) = (0{,}6; 0{,}8i).$$

La lettura H/V fornisce $(0{,}36; 0{,}64)$.

Per una lettura differente occorrono nuove combinazioni delle stesse ampiezze.

Vettori, basi e proiezioni renderanno esplicito quel calcolo.



Il formalismo di Dirac viene introdotto nel modulo 2. Apri il modulo 2

Riferimenti: modelli classici, onde e termodinamica

J. Walker, D. Halliday, R. Resnick, *Fundamentals of Physics*, 12a edizione estesa, Wiley.

Capitoli 15–17 per oscillazioni e onde; capitoli 18–20 per teoria cinetica, entropia e seconda legge; capitoli 35–36 per interferenza e diffrazione; capitoli 38–40 per onde di materia, funzione d'onda e sistemi atomici.

S. Haroche, J.-M. Raimond, *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities and Photons*, Oxford University Press, 2006.

Capitolo 1 per il quadro sperimentale e didattico; capitolo 2 per sovrapposizione, interferenza, complementarità, entanglement, misura e confine quantistico-classico.

Riferimenti: ottica quantistica e informazione

C. C. Gerry, P. L. Knight, *Introductory Quantum Optics*, 1a edizione, Cambridge University Press.

Capitoli 5–6 per coerenza, rivelazione e interferometri; capitoli 8–10 per interazioni con l'ambiente ed esperimenti; appendice A per le rappresentazioni dello stato.

N. D. Mermin, *Quantum Computer Science: An Introduction*, Cambridge University Press, 2007.

Capitolo 1 per qubit, trasformazioni e probabilità degli esiti; capitolo 5 per le tecniche di protezione del calcolo; capitolo 6 per gli esperimenti e le procedure con pochi qubit.

Provenienza delle figure e dei campioni

Disegni vettoriali e modelli illustrativi. Le figure sono costruite nei sorgenti TikZ. I riferimenti fisici principali sono Haroche–Raimond, sezioni 2.1, 2.2, 2.4 e 2.5, e Mermin, sezioni 1.5–1.8 e 6.1.

Campioni riproducibili. I punti sullo schermo provengono da una sequenza simulata con seme 20260917. Gli istogrammi contano gli stessi eventi; i conteggi del gas e le tabelle congiunte sono verificati numericamente.

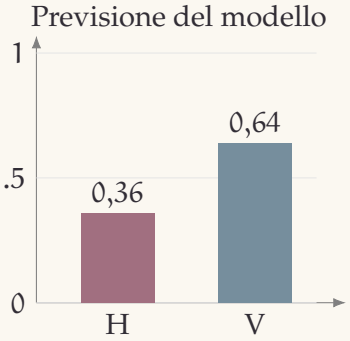
Apparati e storia. Gli schemi delle due sezioni finali sono ricostruzioni didattiche, non in scala. I riferimenti cliccabili nelle slide rimandano alle pubblicazioni; l'elenco completo è incluso nei sorgenti. Le pagine storiche delimitano i compiti, le risorse e le conclusioni degli studi citati.

Dalla previsione alla verifica del modello

La preparazione $(a_H, a_V) = (0{,}6; 0{,}8i)$ ha probabilità

$$p_H = 0{,}6^2 = 0{,}36,$$
$$p_V = |0{,}8i|^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64.$$

La somma è $0{,}36 + 0{,}64 = 1$. Il confronto con dati indipendenti considera dispersione, incertezze e approssimazioni del modello. Per cambiare lettura combineremo le stesse ampiezze. Il secondo modulo ne svilupperà il calcolo attraverso vettori e operatori.



Il confronto collega preparazione, previsione e osservazioni indipendenti. Le stesse ampiezze aprono il percorso del modulo successivo.

Leggere queste slide

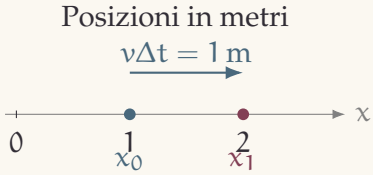
Le pagine raccolgono i passaggi del ragionamento in quadri completi. Una sequenza può proseguire su più pagine, conservando il numero della slide.

Dati e operazione

Per un moto uniforme assumiamo $x_0 = 1\,\mathrm{m}$, $v = 1\,\mathrm{m/s}$ e $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + v\Delta t \\ &= 1 + 1 \cdot 1 = 2\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

Il punto rosso indica la posizione calcolata. La prima parte ha sviluppato la formula.



Le etichette dichiarano quantità, unità e scala. La verifica ricostruisce il conto e confronta prove con le stesse condizioni.

Il numero in basso identifica il quadro; le frecce scorrono le pagine di questo PDF. La dicitura superiore distingue i passi; *Riscontro commentato* apre la spiegazione dell'attività.

Approfondimenti Torna al percorso del modulo

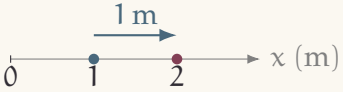
Percorso principale e approfondimenti

I rimandi collegano il percorso principale agli approfondimenti.

Fondamenti	Moto, probabilità, onde, singoli eventi.
Stati e operazioni	Polarizzazione e lamine, operazioni, coppie, ambiente, irreversibilità.
Apparati e programma	Progetto, hardware, storia e caso di Grover.
Sorgente fotonica	Sorgente e registri → coerenza e misure → cristallo e compensazione.
Ripresa dell'hardware	Calibrazione, errori e codifica, dopo i fotoni.

Il primo modello parte da $x_0 = 1\,\mathrm{m}$, $v = 1\,\mathrm{m/s}$, $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$:

$$x_1 = x_0 + v\Delta t = 1 + 1 \cdot 1 = 2\,\mathrm{m}.$$



L'approfondimento conserva le convenzioni delle lamine; modelli ideali ed esempi simulati sono distinti dai risultati sperimentali citati.

Torna al percorso del modulo